ZUR K-THEORIE UND IHREN KOHOMOLOGIE-OPERATIONEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Tammo tom Dieck
aus
Sao Paulo

Saarbrücken 1964

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.1964 und
18.12.1964

Der Dekan: Prof. Dr. F. Seel

Berichterstatter: Prof. Dr. D. Puppe
Prof. Dr. E. Lamprecht

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Herrn Professor Dr. Puppe danke ich für die Anregung, mich mit der K-Theorie zu beschäftigen, für das Interesse an meiner Arbeit und für kritische Hinweise

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1. Ringstrukturen in B_G 1

2. Allgemeines über die k-Theorie 11

3. Ein nicht limes-freundlicher Raum 18

4. Über die Künneth - Formel 22

5. Berechnung von kB_G 29

6. Die Hopf - Algebra kB_G 35

7. Additive Operationen 41

8. Multiplikative Operationen 46

9. Der Bott'sche Isomorphismus 54

10. Die restlichen Operationen $k^* \longrightarrow k^*$ 56

11. Der Chern - Charakter 60

12. Algebraische Theorie der Adams'schen Operationen in λ-Ringen 62

EINLEITUNG

Sei $K(X)$ der Ring der Vektorraumbündel über dem topologischen Raum X. Atiyah und Hirzebruch haben mit Hilfe des Funktors K eine Kohomologie-Theorie konstruiert (vgl. [6]). Die Theorie ist zunächst auf endlich-dimensionalen CW-Komplexen definiert. Vermöge des Isomorphismus $K(X) \cong [X, Z \times B_U]$, der für endlich-dimensionale CW-Komplexe X gilt (vgl. etwa [6], 1.3.; [12], exp. 9), kann man die Theorie auf beliebige Komplexe ausdehnen, indem man statt $K(X)$ die Homotopiemenge $kU(X) = [X, Z \times B_U]$ betrachtet. Diese Erweiterung ist eindeutig bestimmt, wenn man nur wenige einleuchtende Axiome voraussetzt (vgl. Brown [11]).

Zunächst erhebt sich die Frage, ob die so erhaltene Theorie multiplikativ bleibt (zum Begriff vgl. Dold [13]). Das ist der Fall: Wir zeigen nämlich, dass die Räume B_U, B_O und B_{SO} die Struktur eines Homotopie-Ringes tragen (vgl. 1.). Zu diesem Zweck - und auch an weiteren Stellen - ist es wichtig, etwas über das folgende Problem zu wissen:

Sei H ein CW-Komplex, der Limes von endlichen Unterkomplexen $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$ ist (d.h. $H = \bigcup H_i$). Sei V ein weiterer Raum. Die Inklusionen $j_k: H_k \subset H$ und $i_k: H_k \subset H_{k+1}$ geben uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & \longleftarrow & [H_k, V] & \xleftarrow{i_k^*} & [H_{k+1}, V] & \longleftarrow & \ldots \\ & & \uparrow{\scriptstyle j_k^*} & & \uparrow{\scriptstyle j_{k+1}^*} & & \\ & & & [H, V] & & & \end{array}$$

aus dem wir eine Abbildung

$$L: [H, V] \longrightarrow \text{inv lim } [H_k, V]$$

erhalten, die wir als kanonisch bezeichnen. Wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft der CW-Komplexe ist L surjektiv.

Frage: Wann ist L bijektiv? Ist H_k das k-Gerüst von H, so nennen wir H limes-freundlich (bzgl. V), wenn L bijektiv ist. Fragen, die sich hier anschliessen sind: Sei X limes-freundlich für die komplexe k-Theorie; ist X dann auch limes-freundlich für die reelle k-Theorie? Seien X und Y limes-freundlich bzgl. einer k-Theorie; ist dann auch $X \times Y$ limes-freundlich bzgl. dieser k-Theorie? Wir können diese Probleme nur unter einschränkenden Voraussetzungen über X und Y lösen (etwa: ganzzahlige Kohomologie endlich erzeugt); vgl. 1.

Es gibt Räume, die nicht limes-freundlich bzgl. k^*U sind. Wir konstruieren ein Beispiel in 3. Ein anderer Raum wurde von Adams angegeben (unveröffentlicht).

Im allgemeinen ist k(X) nicht zu K(X) isomorph. Doch hat man immer eine natürliche Transformation

$$\varrho: K(X) \longrightarrow k(X),$$

die für jedes X ein Ringhomomorphismus ist (2. Abschnitt A).

Im zweiten Teil der Arbeit geben wir unter anderem einen Überblick über die Kohomologie-Operationen der komplexen k-Theorie. Zu diesem Zweck zeigen wir, dass kB_G für $G = U$, SO und T die Struktur einer topologischen Hopfalgebra trägt. Dabei berühren wir das folgende Problem: Lässt sich $k^*(X \times Y)$ aus k^*X und k^*Y berechnen? Für endliche X und Y steht einem die Künneth-Formel zur Verfügung (vgl. Atiyah [4]). Sie gilt ohne Änderung, falls X ein beliebiger CW-Komplex, Y endlich-dimensional und $k^*U(Y)$ endlich erzeugt ist. Auch in anderen Fällen lassen sich Aussagen machen, z.B. wenn X und Y klassifizierende Räume kompakter Liescher Gruppen sind (vgl. 4.).

Mit Hilfe der Komultiplikation Δ in den Hopfalbegren $kU(B_{SO})$, $kU(B_U)$ und $kU(B_T)$ bestimmen wir die additiven Operationen $kU \longrightarrow kU$ und $kSO \longrightarrow kU$. Sie sind durch ihre Wirkung auf $kU(CP^\infty)$ bzw. $kSO(CP^\infty)$ bestimmt (CP^∞ = unendlicher komplexer projektiver Raum).

Bis auf Komplettierung werden die additiven Operationen durch die Operationen ψ^k von Adams erzeugt (vgl. [1]). Die ψ^k stellen sich als die einzigen multiplikativen Operationen heraus (8.). Wir geben auch einen neuen Beweis für die Multiplikativität der Operationen ψ^k. Dabei rechnen wir unmittelbar im universellen Beispiel und verwenden nicht die Konstruktion der ψ^k aus den äusseren Potenzen und Darstellungstheorie.

Die additiven Operationen $kSO \longrightarrow kU$ entstehen alle aus den additiven Operationen $kU \longrightarrow kU$ durch Davorschalten der Komplexifizierung.

Ähnliche Fragen wurden auch von Weishu Shih behandelt (unveröffentlicht). Auf die in 7. angegebene Weise lassen sich leicht auch die Operationen $S: kU \longrightarrow kU$ mit der Eigenschaft $S(x+y) = Sx \cdot Sy$ behandeln (charakteristische Klassen; vgl. Atiyah und Hirzebruch [7], 2.5.). Sie sind durch $S1 = \pm 1$ und $S(\mu) = 1 + a_1\mu^1 + a_2\mu^2 + \ldots$ charakterisiert (vgl. 7.). Auch die von Weishu Shih betrachteten nicht-stabilen charakteristischen Klassen sind durch ihren Wert auf dem kanonischen Geradenbündel über CP^∞ bestimmt.

Um aus den additiven Operationen $kU \longrightarrow kU$ die multiplikativen auszusondern, verwenden wir den folgenden Kunstgriff: Wir verschaffen uns eine Abbildung $f: X \longrightarrow X$ $(X = CP^\infty)$, die ein geeignetes universelles Element $x \in kX$ in ein Polynom in x überführt. Dann nutzen wir die Natürlichkeit und die Multiplikativität der Operation aus und erhalten eine notwendige Bedingung für multiplikative Operationen. Wir erläutern dieses Verfahren noch zwei Beispielen: Dem Chern - Charakter (11.) und den Operationen $kSO \longrightarrow kU$ (8.). Im letzten Fall werden wir auf eine Bedingung geführt, die zahlentheoretische Schwierigkeiten bringt.

In 9. untersuchen wir die zweifache Einhängung der Operationen $kU \longrightarrow kU$. Es stellt sich heraus: Jede additive Operation ist zweifache Einhängung einer (nicht notwendig additiven) Operation.

In 10. bestimmen wir die restlichen Operationen $k^*U \longrightarrow k^*U$. Das läuft im wesentlichen auf die Berechnung von $k^*U(n)$ hinaus. Indem man Methoden von Borel (vgl.[8]) verwendet, kann man zeigen, dass k^*G für eine kompakte zusammenhängende Liesche Gruppe eine von primitiven Elementen aus k^1G erzeugte äussere Algebra ist, falls nur k^*G als torsionsfrei vorausgesetzt wird; usw.. Das führen wir in dieser Arbeit jedoch nicht durch.

In 12. untersuchen wir die Adams-schen Operationen in λ-Ringen und beweisen rein algebraisch ihre Haupteigenschaften.

= = = = = = = = =

Bezeichnungen

$[X,Y]$ = Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $X \longrightarrow Y$

$kX = kU(X) = [X, Z \times B_U]$

k steht auch für eine beliebige Kohomologie-Theorie.

$kO(X) = [X, Z \times B_O]$ $\qquad$ $kSO(X) = [X, Z \times B_{SO}]$.

$K(X)$ = Ring der Vektorraumbündel über X (falls zur Unterscheidung nötig: $KU(X)$, $KO(X)$).

$\lim A_i$ = Inverser Limes eines Systems $A_1 \longleftarrow A_2 \longleftarrow A_3 \longleftarrow \ldots$

Mit (n,k) bezeichnen wir manchmal den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Bezeichnungen (Forts.)

$\lim^1$ = vgl. Definition Seite 23, Zeile 3

$k^*U = k^0U \oplus k^1U$

k^*0 sei entsprechend das Z_8-graduierte Objekt

(ML) = Mittag-Leffler-Bedingung (vgl. Seite 6)

$r: kU \longrightarrow kO$ Operation, die dadurch induziert wird, dass jedem komplexen Bündel das zugrunde liegende reelle Bündel zugeordnet wird.

$c: kO \longrightarrow kU$
$c: kSO \longrightarrow kU$
} = Komplexifizierung

Δ = Diagonalabbildung $X \longrightarrow X \times X$; oder Komultiplikation in einer Hopf-Algebra

$\simeq$ = homotop

$\wedge$ = Komplettierung

Anmerkungen

[1]) (Seite 12) $B_{U(n)}$ und $B_{U(n)} \times B_{U(m)}$ sind limesfreundlich bzgl. k^*U; vgl. 1.8., 1.9.

[2]) (Seite 17) Hier wird verwendet, dass $B_{U(n)}$ limesfreundlich ist.

[3]) (Seite 18) Die Definition der σ_i findet man in 5.8.

[4]) (Seite 34) Hier muss es heissen (vgl. [20])

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{r-k+j}{[j/2]} \cdot \tau_{k-j}$$

[5]) (Seite 35) mB_G soll hier und im folgenden die Komplettierung der Produktabbildung $kB_G \otimes kB_G \longrightarrow k(B_G \times B_G)$ sein (vgl. 4.)

[6]) (Seite 44 und 51) Genauer hat man zu verwenden: $kO(B_{T(1)})$ ist der Ring der formalen Potenzreihen in $r\mu$ und $cr\mu$ in $kU(B_{T(1)})$ ist das Element $\mu + \frac{1}{1+\mu} - 1$. Abgesehen von den in 7.4. gemachten Identifizierungen ist das Element z aus 7.4. gleich dem Element x aus 8.8.

[7]) (Seite 45) Diese für alle $k,t \in Z$ gültige Beziehung folgt aus 8.7. Die Gleichungen zwei Zeilen weiter gelten für $k > 0$.

[8]) (Seite 46) Hier muss es heissen: Für $1 \leq k \leq 1$ gilt

$$\mu^k \circ \mu^1 = \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^1 \right) \mu^1 + \text{höhere Potenzen von } \mu.$$

9) (Seite 65) Die Addition in R' ist die Multiplikation der Potenzreihen aus $1 + R[[t]]^+$

10) (Seite 66) Zeile 9 bis 11 v. oben muss es heissen:

... , die von den Elementen der Gestalt $(1 + x_1^{c_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{c_n} y_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{d_n} t)$ erzeugt wird (c_i, d_j natürliche Zahlen)...

Der entstehende Ring ist übrigens isomorph zum Polynomring $Z[x_1, \ldots, y_1, \ldots]$.

1. RINGSTRUKTUREN IN B_G

Die folgenden Bemerkungen 1.1. bis 1.6. beruhen auf Ideen von Eckmann und Hilton (vgl. [14], [15]). Bekanntschaft mit diesen Arbeiten voraussetzend können wir uns kurz fassen.

1.1. Sei H ein CW - Komplex, Limes von endlichen Unterkomplexen $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$, $H = \bigcup H_i$. Seien

$$L_1 : [H,H] \longrightarrow \lim [H_i,H]$$

$$L_2 : [H\times H,H] \longrightarrow \lim [H_i\times H_i,H]$$

$$L_3 : [H\times H\times H,H] \longrightarrow \lim [H_i\times H_i\times H_i,H]$$

die kanonischen Abbildungen. Sie sind surjektiv. ([X,Y] = Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $X \longrightarrow Y$).

Die Homotopimenge [X,H] trage für endliche CW-Komplexe X eine natürliche Verknüpfung (additiv geschrieben).

Lemma: Sei L_2 bijektiv. Es gibt eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung a: $H\times H \longrightarrow H$, die für endliche CW-Komplexe X in [X,H] die gegebene Verknüpfung induziert.

Beweis: Existenz. Seien p_i, q_i : $H_i\times H_i \longrightarrow H_i$ die erste bzw. zweite Projektion. Sei s_i : $H_i \subset H_{i+1}$, t_i : $H_i \subset H$. Es gilt

$$(s_i\times s_i)^*([t_{i+1}p_{i+1}] + [t_{i+1}q_{i+1}]) = [t_ip_i] + [t_iq_i].$$

Die $[t_ip_i] + [t_iq_i]$ bestimmen also ein Element x aus

$\lim[H_i \times H_i, H]$. Sei $[a] \in L_2^{-1}x$. Mit a definieren wir eine Verknüpfung in $[X,H]$. Für endliche CW-Komplexe X ist es die gewünschte.

Eindeutigkeit. Ist $b: H \times H \longrightarrow H$ irgendeine Abbildung, die für endliche CW-Komplexe X in $[X,H]$ die richtige Verknüpfung induziert, so gilt

$$\overset{t_i}{\underset{\wedge}{[p_i]}} + \overset{t_i}{\underset{\wedge}{[q_i]}} = [b(t_i \times t_i)(p_i * q_i)\Delta] = [b(t_i \times t_i)].$$

Demnach folgt: $L_2[b] = x$. L_2 ist bijektiv, also $[b]$ eindeutig durch x bestimmt.

1.2. Lemma: Sei auch L_1 bijektiv. Hat die Verknüpfung in $[X,H]$ ein natürliches neutrales Element, so ist H ein H-Raum.

Beweis: Zunächst folgt aus der Natürlichkeit der Verknüpfung, dass das neutrale Element durch eine konstante Abbildung repräsentiert wird, weil es für X = Punkt gilt. Das Bild einer solchen konstanten Abbildung liegt immer in derselben Bogenkomponente von H. Sei $e \in H$ ein Punkt in dieser Bogenkomponente. Dann können wir das neutrale Element aus $[X,H]$ durch $k: X \longrightarrow \{e\} \subset H$ repräsentieren. Es ist zu zeigen, dass die Abbildungen

$$H \xrightarrow[i_j]{} H \times H \xrightarrow{a} H$$

homotop zur Identität sind; dabei sei $i_1 h = (h,e)$, $i_2 h = (e,h)$ für $h \in H$. Nun gilt

$$[a i_1 t_i] = [a(t_i \times k)\Delta] = [t_i] + [k] = [id_H t_i].$$

Aus der Injektivität von L_1 folgt die Behauptung.

1.3. Lemma: Sei L_3 bijektiv. Ist die Verknüpfung in $[X,H]$ assoziativ, so ist H ein homotopie-assoziativer H-Raum.

Sei L_2 bijektiv. Ist die Verknüpfung in $[X,H]$ kommutativ, so ist H ein homotopie-kommutativer H-Raum.

Sei L_1 bijektiv. Ist die Verknüpfung in $[X,H]$ eine Gruppenstruktur, so existiert eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung $n: H \longrightarrow H$ (Inverses) mit $a(id \times n)\Delta \simeq 0$, $a(n \times id)\Delta \simeq o$.

Beweis: Als Beispiel zeigen wir die Behauptung über die Kommutativität. Die weiteren Behauptungen lassen sich entsprechend einsehen; wir haben vermerkt, welche der Abbildungen L_i man zu verwenden hat.

Wir wollen also $a \simeq aT$ zeigen, wobei $T: H \times H \longrightarrow H \times H$ die Vertauschung der Faktoren ist. Nun gilt

$$\begin{aligned}[a(t_i \times t_i)] &= \overset{t_i}{\underset{\wedge}{[p_i]}} + \overset{t_i}{\underset{\wedge}{[q_i]}} = \overset{t_i}{\underset{\wedge}{[q_i]}} + \overset{t_i}{\underset{\wedge}{[p_i]}} \\ &= [a(t_i \times t_i)(q_i \times p_i)\Delta] \\ &= [aT(t_i \times t_i)(p_i \times q_i)\Delta] \\ &= [aT(t_i \times t_i)]\,.\end{aligned}$$

Mithin bestimmen a und aT dasselbe Element in $\lim [H_i \times H_i, H]$.

Bemerkung: Ist H ein zusammenhängender, homotopie-assoziativer H-Raum, so ist $[X,H]$ für endliche CW-Komplexe sogar eine Gruppe.

1.4. Lemma: Sei H eine Gruppe bis auf Homotopie. Sei H(o) die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes e. Sei $G \cong [\text{Punkt}, H]$.

Dann ist H homotopie-äquivalent zu $G \times H(o)$, wobei wir G die diskrete Topologie geben. Ist H kommutativ bis auf Homotopie, so ist die Gruppenstruktur in H Produkt der Gruppenstruktur in G mit der in H(o), die durch a induziert wird.

Beweis: Sei $g \in G$ und H(g) die Zusammenhangskomponente von H, die diesem g vermöge $G \cong [\text{Punkt}, H]$ entspricht. Sei $k_g : X \longrightarrow H(g) \subset H$ eine konstante Abbildung. Es gilt $[k_g] + [k_h] = [k_{g+h}]$. Seien f bzw. f' Repräsentanten von $[id_H] + [k_g]$ bzw. $[id_H] + [k_{-g}]$. Dann ist

$$[f'f] = f^*([id_H] + [k_{-g}]) = [f] + f^*[k_{-g}]$$
$$= [id_H] + [k_g] + [k_{-g}] = [id_H],$$

und ebenso $[ff'] = [id_H]$. f induziert eine Homotopie-Äquivalenz $f_g : H(o) \longrightarrow H(g)$, die bis auf Homotopie eindeutig durch g bestimmt ist. $F : G \times H(o) \longrightarrow H$ sei durch $F(g,x) = f_g x$ gegeben. $F_* : [X, G \times H(o)] \longrightarrow [X, H]$ ist ein Isomorphismus; mit anderen Worten

$$\begin{array}{ccc} G \times H(o) \times G \times H(o) & \xrightarrow{F \times F} & H \times H \\ \downarrow{\scriptstyle b \times a_1} & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ G \times H(o) & \xrightarrow{F} & H \end{array}$$

ist homotopie-kommutativ (b Verknüpfung in G; a_1 induziert durch a). Sei $i : H(o) \subset H$. $a(F \times F)$ beschränkt auf $g \times H(o) \times h \times H(o)$ repräsentiert

$$pr_1^*([i] + [k_g]) + pr_2^*([i] + [k_h]) = \underset{\hat{i}}{[pr_1]} + \underset{\hat{i}}{[pr_2]} + [k_g] + [k_h]$$
$$= \underset{\hat{i}}{[a_1]} + [k_{g+h}] \in [H(o) \times H(o), H].$$

Das letzte Element wird durch $F(o \times a_1) \mid g \times H(o) \times h \times H(o)$ repräsentiert. (Im Verlauf des Beweises haben wir $g \times H(o)$ mit $H(o)$ identifiziert; $g \in G$).

1.5. Satz: Ist $[X,H]$ ein kommutativer Ring mit Einselement und sind L_1, L_2, L_3 bijektiv, so trägt H eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Struktur eines homotopie-kommutativen H-Ringes, die in $[X,H]$ die gegebene Struktur induziert. o und 1 werden durch konstante Abbildungen repräsentiert. Wegen $o \neq 1$ ist H nicht zusammenhängend.

1.6. Entsprechende Sätze wie unter 1.1. bis 1.5. gelten, wenn man voraussetzt, dass die H_i endlich-dimensionale Unterkomplexe sind und $[X,H]$ für endlich-dimensionale X eine natürliche Verknüpfung besitzt (mit denselben Annahmen über L_1, L_2, L_3).

1.7. Wir wollen zeigen, dass die Räume B_U, B_O, B_{SO} eine H-Ringstruktur besitzen. Zu diesem Zweck müssen wir die Abbildungen L_i aus 1.1. untersuchen.

Sei k^* eine (repräsentierbare) Kohomologie-Theorie. Sei X^n das n-Gerüst des CW-Komplexes X. Sei

$$L: k^*X \longrightarrow \lim k^*X^n$$

die kanonische Abbildung.

Definition: X heisse limes-freundlich bzgl. k^*, wenn L bijektiv ist. X heisse limes-freundlich bzgl. des Raumes V, wenn die kanonische Abbildung $[X,V] \longrightarrow \lim [X^n,V]$ bijektiv ist.

Nach Milnor [19] gibt es eine exakte Sequenz

$$o \longrightarrow \lim{}^1 k^{p-1} X^n \longrightarrow k^p X \longrightarrow \lim k^p X^n \longrightarrow o.$$

Sei $(A_i \mid i \in Z)$ ein inverses System von Gruppen. Man sagt, es erfüllt die Mittag-Leffler Bedingung (ML), wenn es zu jedem i ein j gibt, so dass für $k \geqslant j$ gilt

$$Bild(A_k \longrightarrow A_i) = Bild(A_j \longrightarrow A_i).$$

Lemma: Sei A: $A_1 \xleftarrow{p} A_2 \xleftarrow{p} \ldots$ ein inverses System abzählbarer abelscher Gruppen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) A erfüllt (ML).

b) $\lim{}^1 A_k = o$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) ist bekannt. b) $\Rightarrow$ a):
Ist $o \longrightarrow (A_n) \longrightarrow (C_n) \longrightarrow (B_n) \longrightarrow o$ ein inverses System von exakten Folgen abelscher Gruppen, so gibt es eine exakte Sequenz

$$o \longrightarrow \lim A_n \longrightarrow \lim C_n \longrightarrow \lim B_n \longrightarrow \lim{}^1 A_n \longrightarrow \lim{}^1 C_n \longrightarrow \lim{}^1 B_n \longrightarrow o.$$

Sei (ML) nicht erfüllt. Wir können annehmen, dass (ML) an der Stelle A_1 verletzt ist. Das heisst: Ist

$$B_k = Bild(A_k \longrightarrow A_1),$$

so gibt es keine Zahl n, so dass für alle $k \geqslant n$ $B_k = B_n$ wird. Sei

$$C_k = Kern\ (A_k \longrightarrow A_1).$$

Wir erhalten ein inverses System von exakten Sequenzen

$$o \longrightarrow (C_k) \longrightarrow (A_k) \longrightarrow (B_k) \longrightarrow o.$$

Da $\lim{}^1 A_k \longrightarrow \lim{}^1 B_k$ surjektiv ist, genügt es zu zeigen, dass $\lim{}^1 B_k \neq o$ ist. Aus dem inversen System exakter Folgen

$$o \longrightarrow (B_k) \longrightarrow (A_l) \longrightarrow (E_k) \longrightarrow o$$

mit $E_k = A_l/B_k$ erhalten wir die exakte Folge

$$\lim A_l \longrightarrow \lim E_k \longrightarrow \lim^1 B_k \ .$$

$\lim A_l \cong A_l$ ist abzählbar, $\lim E_k$ überabzählbar, also $\lim^1 B_k \neq o$.

Folgerung: Sei X ein CW-Komplex, für den k^*X^p abzählbar ist für unendlich viele $p > o$. X ist genau dann limes-freundlich bzgl. k^*, wenn (k^*X^p) die Bedingung (ML) erfüllt.

1.7.1. (k^*X^p) erfüllt genau dann die ML-Bedingung (für eine Kohomologie-Theorie k^*), wenn in der Spektralsequenz, die $H^*(X;k^*(\text{Punkt}))$ mit k^*X verbindet, zu jedem (p,q) ein r existiert mit $E_r^{p,q} = E_s^{p,q}$ für $s \geq r$ (vgl. Anderson [2]). Diese Bedingung kürzen wir mit (MLSS) ab. Sind $H^*(X;Z)$ und $k^*(\text{Punkt})$ von endlichem Typ und gibt es zu jedem Element x aus $H^p(X,k^q(\text{Punkt}))$ ein Vielfaches nx, $o \neq n \in Z$, das permanenter Zykel in der Spektralsequenz ist, so gilt (MLSS).

1.8. Satz: a) Seien X und Y limes-freundlich bzgl. k^*U. Seien k^*X^p und k^*Y^p endlich erzeugt (für $p > p_o$). Dann ist auch $X \times Y$ limes-freundlich bzgl. k^*U.

b) Sei $H^*(X;Z)$ von endlichem Typ. X ist genau dann limes-freundlich bzgl. k^*U, wenn es limes-freundlich bzgl. k^*O ist.

Beweis: a). Nach dem Lemma aus 1.7. erfüllen (k^*X^p) und (k^*Y^p) die Bedingung (ML). Mithin gilt (ML) auch für $(k^*X^p \otimes k^*Y^p)$. $(\text{Tor}(k^*X^p, k^*Y^p))$ genügt (ML), da es sich um endliche Gruppen handelt. Aus der exakten Sequenz

$$o \longrightarrow k^*X^p \otimes k^*Y^p \longrightarrow k^*(X^p \times Y^p) \longrightarrow \text{Tor}(k^*X^p, k^*Y^p) \longrightarrow o$$

(vgl. Atiyah [4]. Sie gilt auch in dem hier benötigten allgemeineren Fall; vgl. 4.) und 3.7. aus Atiyah [5] folgt, dass auch $(k^*(X^p \times Y^p))$ und damit $(k^*(X \times Y)^p)$ die (ML)-Bedingung erfüllt. Es folgt die Behauptung.

b). Sei X limes-freundlich bzgl. k^*U. Aus der Voraussetzung und $k^{2p+1}U(\text{Punkt}) = o$ folgert man mittels der kU- Spektralsequenz, dass $k^o(X^{2n+1})$ und $k^1(X^{2n})$, $n \geq 1$, abzählbar sind. (k^*UX^p) erfüllt also (ML) (vgl. 1.7. Folg.) und folglich gilt (MLSS) für die kU-Spektralsequenz von X. Wir betrachten nun die Operation $r: kU \longrightarrow kO$. Sie induziert einen Morphismus von Spektralsequenzen $r: E_t^{p,q} U \longrightarrow E_t^{p,q} O$.

$$H^p(X;k^qU(\text{Pkt})) = E_2^{p,q} U \longrightarrow E_2^{p,q} O = H^p(X;k^qO(\text{Pkt}))$$

wird durch den Koeffizienten- Homomorphismus $r: k^qU(\text{Pkt}) \longrightarrow k^qO(\text{Pkt})$ induziert. Im Falle $q = 4s$ ist dieser entweder ein Isomorphismus oder Multiplikation mit 2 (vgl. Adams[1], Lemma 3.9. und Beweis zu Cor. 5.2.). In den anderen Fällen ist $k^qO(\text{Pkt})$ endlich. Der Kokern von $r: E_2^{p,q}U \longrightarrow E_2^{p,q} O$ ist also eine endliche Gruppe. Übergang zu höheren Termen E_t $(t \geq 2)$ ändert daran nichts. Man hat zu zeigen, dass für jedes x aus $E_t^{p,q} O$ ein gewisses Vielfaches von x im Bild von r liegt. Man schliesst induktiv nach t und verwendet: Die Bilder der Differentiale

$$d_t : E_t^{p,q} U \longrightarrow E_t^{p+t,q-t+1}U$$

sind endliche Gruppen, da die Spektralsequenz $E_t^{p,q}U \otimes Q$ zusammenbricht (vgl. Atiyah und Hirzebruch [6], 2.4. und Dold [13]). Man schliesst jetzt leicht, dass $E_t^{p,q}O$ (MLSS) erfüllt, weil es für $E_t^{p,q}U$ gilt.

Für den Schluss von kO auf kU verwende man entsprechend die Komplexifizierung c: $kO \longrightarrow kU$.

1.9. Sei B einer der Räume B_U, B_O, B_{SO}. $[X,Z;B]$ trägt für endlich-dimensionale CW-Komplexe die Struktur eines kommutativen Ringes mit Einselement. Wir sagen für $B = B_U$, wie diese Struktur definert ist. Es gibt nämlich einen natürlichen Isomorphismus φ von K(X), dem Ring der Vektorraumbündel über X, mit $[X,Z;B]$. φ ist folgendermassen erklärt: Sei E ein n-dimensionales Bündel über X. Es bestimmt eine Homotopieklasse $X \longrightarrow B_{U(n)}$. $\varphi[E]$ sei dann $X \longrightarrow B_{U(n)} \longrightarrow \{n\} \times B_U$.

Wir zeigen nun, dass $B_{U(n)}$ und B_U limes-freundlich bzgl. k^*U sind. Wir führen den Beweis für B_U aus. Für $B_{U(n)}$ läuft er genau so.

Es ist sogar B_G für eine beliebige kompakte Liesche Gruppe G limes-freundlich bzgl. k^*U (vgl. Anderson [2]).

$H^*(B_U;Z)$ ist von endlichem Typ (Polynomring in den universellen Chern-Klassen). Die kU-Spektralsequenz

für B_U ist trivial, da $H^i(B_U) = 0$ ist für ungerade i (vgl. Atiyah - Hirzebruch [6], 2.4.). Aus 1.7., 1.8. und 1.5. folgt, dass $Z \times B_U$ eine H-Ringstruktur hat. (Um aus 1.8. auf die Bijektivität von L_2 (vgl. 1.1.) zu schliessen, bedenke man $(B \times B)^n \subset B^n \times B^n \subset (B \times B)^{2n}$).

Sei $k: B_O \to B_U$ die Abbildung, die aus den Einbettungen $O(n) \subset U(n)$ entsteht. Der Torsionsbestandteil von $H^*(B_O, Z)$ hat als Suppelement den Polynomring $Z[p_1, p_2, ..]$ in den universellen Pontrjagin-schen Klassen. Die Pontrjagin-Klassen treten als Bild der Chern-Klassen bei $k^*: H^*(B_U) \longrightarrow H^*(B_O)$ auf (vgl. Sem. Cartan [12], exp. 17). Die kU-Spektralsequenz für B_U ist trivial. $Z[p_p, p_2, ..]$ besteht also aus permanenten Zykeln. Es gibt demnach zu jedem Element aus $H^p(B_O; k^q U(Pkt))$ ein Vielfaches, das permanenter Zykel ist. Aus 1.5., 1.7. und 1.8. folgt, dass $Z \times B_O$ eine H-Ringstruktur hat.

Sei $f: B_{SO} \longrightarrow B_O$ eine zweifache Überlagerung. Dann ist $f_*: [X, B_{SO}] \longrightarrow [X, B_O]$ injektiv. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [X, B_{SO}] & \xrightarrow{L} & \lim [X_i, B_{SO}] \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ [X, B_O] & \xrightarrow{L'} & \lim [X_i, B_O] \end{array}$$

folgt aus der Bijektivität von L' diejenige von L. Auch in $H^p(B_{SO}; k^q(Pkt))$ ist ein geeignetes Vielfaches eines jeden Elementes permanenter Zykel, was man wie die

entsprechende Aussage über B_0 beweisen kann. Damit haben wir uns auch von der Existenz einer Ringstruktur in $Z \times B_{SO}$ überzeugt.

2. ALLGEMEINES UBER DIE k-THEORIE

A. Die Transformation $\varrho : K(X) \longrightarrow k(X)$

2.1. Die vermöge 1.9. bestimmte "Addition" $a: B \times B \longrightarrow B$ in B hat die folgende Eigenschaft: Seien $f: X \longrightarrow B$, $g: Y \longrightarrow B$ Abbildungen endlicher CW-Komplexe in B, deren Bild in $B_{U(n)}$ bzw. $B_{U(m)}$ liegen möge. (Wir untersuchen $B = B_U$ und die komplexe K-Theorie. Die anderen Fälle lassen sich entsprechend behandeln). Diese Abbildungen bestimmen ein n- bzw. m-dimensionales Bündel F bzw. G eindeutig bis auf Aquivalenz. Die "äussere" Whitney-Summe $F \oplus G$ gibt uns bis auf Homotopie eindeutig eine Abbildung $h: X \times Y \longrightarrow B_{U(n+m)}$. Es gilt $a(f \times g) \simeq i_{n+m} h$ ($i_k: B_{U(k)} \subset B_U$). Eine entsprechende Aussage gilt für die "Multiplikation" in B und das Tensorprodukt.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die voranstehenden Behauptungen richtig bleiben, wenn X und Y beliebige CW-Komplexe sind. Aus Gründen der Natürlichkeit genügt es, nur die universellen Bündel zu untersuchen. Sei $E(n) \longrightarrow B_{U(n)}$ ein universelles n-dimensionales Bündel. Sei $h: B_{U(n)} \times B_{U(m)} \longrightarrow B_{U(n+m)}$ durch $E(n) \oplus E(m)$ bestimmt. Zu zeigen ist: $i_{n+m} h$ und $a(i_n \times i_m)$ sind homotop. Bezeichnen wir mit $j_k: B^k_{U(n)} \subset B_{U(n)}$ die

Inklusion des k-Gerüstes in $B_{U(n)}$, so sind nach unseren Vorbemerkungen über die Eigenschaften von a

$$a(i_n \times i_m)(j_k \times j_k) \quad \text{und} \quad i_{n+m} h(j_k \times j_k)$$

homotop. Aus [7])

$$[B_{U(n)} \times B_{U(m)}, B_U] \cong \lim [B^k_{U(n)} \times B^k_{U(m)}, B_U]$$

folgt die Behauptung. Das Tensorprodukt behandelt man entsprechend.

2.2. Wir konstruieren eine natürliche Transformation

$$\varphi : K(X) \longrightarrow k(X),$$

die für endliche CW-Komplexe X gerade die in 1.9. beschriebene ist. Sei M(X) das Monoid, gebildet aus den Klassen von Vektorraumbündeln über X mit der Whitney-Summe als Verknüpfung. Wir geben zunächst einen Homomorphismus $\varphi' : M(X) \longrightarrow k(X)$ an. Dazu müssen wir jedem Vektorraumbündel E über X eine Homotopieklasse $\varphi' E : X \longrightarrow Z \times B_U$ zuordnen. Es genügt, eine repräsentierende Abbildung von $\varphi' E$ auf jeder Zusammenhangskomponente X_i von X anzugeben. Über X_i hat E feste Dimension, sagen wir m. $E|X_i$ bestimmt bis auf Homotopie eine Abbildung $f_i : X_i \longrightarrow B_{U(m)}$. Die gewünschte Abbildung sei $X_i \longrightarrow B_{U(m)} \longrightarrow \{m\} \times B_U$. Aus der in 2.1. erläuterten Eigenschaft der H-Raum-Struktur von B_U folgt, dass ein Homomorphismus vorliegt. Gehen wir von M(X) zur universellen Gruppe K(X) über, so erhalten wir φ. Aus 2.1. folgt, dass φ sogar ein Ringhomomorphismus ist. B_O und B_{SO} (und B_{Sp}) lassen sich entsprechend behandeln.

Bemerkung: Für unendliche CW-Komplexe ist ϱ im allgemeinen kein Isomorphismus mehr. Sei $X = CP^\infty$ und $k = kU$. Dann hat Schwarzenberger gezeigt, dass jedes komplexe Vektorraumbündel über CP^∞ stabil äquivalent zu einer Summe von Geraden-Bündeln ist (vgl. Anhang zur englischen Übersetzung von [18]). Also besteht Bild ϱ aus den Elementen der Form

$$\sum a_i(1+\mu)^{k_i} \in \mathbb{Z}[[\mu]] \quad \text{(endl. Summe)}$$

$a_i, k_i \in Z$. Das sind gewiss nicht alle Elemente aus $Z[[\mu]]$, da jede solche Summe durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz $(1+\mu)^k$ in ein Polynom über geht.

B. Topologien in k(X)

2.3. Sei X ein topologischer Raum. A(X) sei die Kategorie, deren Objekte Abbildungen e, f, .. : E, F,.. $\longrightarrow$ X sind und deren Morphismen a: e $\longrightarrow$ f Abbildungen a: E $\longrightarrow$ F sind mit der Eigenschaft fa $\simeq$ e. Gibt es ein a: e $\longrightarrow$ f, so schreiben wir e < f.

Sei k eine Kohomologie-Theorie und B(X) eine Teilkategorie von A(X) mit der Eigenschaft: Zu je zwei Objekten e, f von B(X) gibt es ein Objekt g aus B(X) mit e < g, f < g. Die Kerne der Abbildungen e^*: $k(X) \to k(E)$ bilden ein Fundamentalsystem von Umgebungen der Null für eine Topologie in k(X), wenn e die Objekte von B(X) durchläuft.

Eine Abbildung $h: X \longrightarrow Y$ induziert einen Funktor $h': A(X) \longrightarrow A(Y)$. Ist $h'B(X) \subset B(Y)$, so ist $h^*: k(Y) \longrightarrow k(X)$ stetig. Ist die Theorie auf $B(X)$ definiert und $\phi : k \longrightarrow k$ eine Kohomologie-Operation mit $\phi\, o = o$, so ist $\phi X: k(X) \longrightarrow k(X)$ stetig.

2.4. Wir interessieren uns hauptsächlich für zwei Topologien:

E-Topologie: $B(X)$ bestehe aus den Abbildungen endlicher CW-Komplexe in X.

D-Topologie: $B(X)$ bestehe aus den Abbildungen endlichdimensionaler CW-Komplexe in X.

Wenn wir auf eine dieser Topologien bezug nehmen, so verwenden wir D oder E entsprechend als Index.

$$\mathrm{id}: k_D(X) \longrightarrow k_E(X)$$

ist stetig, d.h. die D-Topologie ist feiner als die E-Topologie.

Ist X selbst ein CW-Komplex, so lassen sich die beiden Topologien noch anders beschreiben. Eine Abbildung eines endlichen CW-Komplexes lässt sich immer über die Inklusion eines endlichen Unterkomplexes faktorisieren, so dass schon die Kerne der Abbildungen $i^*: k(X) \longrightarrow k(E)$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen der Null für die E-Topologie bilden, wenn $i: E \subset X$ die Inklusionen der endlichen Unterkomplexe von X durchläuft. Für die D-Topologie hat man entsprechend nur die Inklusionen der Gerüste zu verwenden.

Es gibt Komplexe, für die D- und E-Topologie verschieden sind; z.B. für B_T (vgl. 5.6.) und $k = kU$. Bei einem Komplex mit endlichen Gerüsten fallen beide Topologien zusammen; z.B. für B_G, G kompakte Liesche Gruppe.

Ist $kX \cong \lim kX^n$, so ist kX bezüglich der D-Topologie komplett und Hausdorffsch.

2.5. Lemma: Sei $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ eine Folge von T_1-Räumen. $X = \bigcup X_i$ trage die Limestopologie. Es sei $kX \cong \lim k(X_i)$. Tragen die $k(X_i)$ die E-Topologie und geben wir k(X) die Limestopologie, so stimmt in k(X) die Limestopologie mit der E-Topologie überein.

(Die D-Topologie hat eine entsprechende Eigenschaft nicht. Beispiel: $B_{T(1)} \subset B_{T(2)} \subset \ldots$, denn in $B_{T(n)}$ stimmen D- und E-Topologie überein, dagegen nicht in B_T. T(n) ist in 5.6. erklärt.)

Beweis: Ein Fundamentalsystem von Umgebungen der Null in der Limestopologie erhält man wie folgt: Man gehe aus von den kanonischen Abbildungen $f_i: kX \longrightarrow k(X_i)$ und nehme die Urbilder $f_i^{-1}(U)$, wobei U ein Fundamentalsystem von Umgebungen der Null in $k(X_i)$ durchläuft. Ist nun $V = \text{Kern } e^* \subset kX$, $e: E \longrightarrow X$, eine Nullumgebung in der E-Topologie, so gibt es ein i mit $e(E) \subset X_i$ (da e(E) kompakt ist), und aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} kX & \longrightarrow & k(X_i) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & kE & \end{array}$$

folgt, dass V auch eine Nullumgebung in der Limestopologie

ist; d.h. die Limestopologie ist feiner als die E-Topologie. Umgekehrt: Die Limestopologie ist die gröbste Topologie bei der die Abbildungen $kX \longrightarrow kX_i$ stetig sind.

C. Über Kohomologie-Operationen

2.6. Wir betrachten Transformationen

$$t: [\ ,V] \longrightarrow [\ ,W]$$

des Funktors $[\ ,V]$ in den Funktor $[\ ,W]$. Dabei sei V ein CW-Komplex mit endlichen Gerüsten. $[\ ,V]$ bzw. $[\ ,W]$ können als Funktoren angesehen werden, die auf der Kategorie aller bzw. aller endlichen CW-Komplexe erklärt sind. Die Menge der natürlichen Transformationen zwischen ihnen sei entsprechend T bzw. Te. Vermöge $t \longrightarrow t[id_V]$ wird T bijektiv auf $[V,W]$ abgebildet $(t \in T)$.

Wir bezeichnen mit $c_j: V^j \subset V$, $c_{jk}: V^k \subset V^j$ die Inklusionen der Gerüste von V. Die $[V^j,W]$ und c_{jk}^* bilden ein inverses System. Für jede Transformation $t \in Te$ bestimmt die Folge $(t[c_j])$ ein Element aus $\lim [V^j,W]$.

Lemma: Die Zuordnung $t \longrightarrow (t[c_j])$ ist eine bijektive Abbildung $Te \longrightarrow \lim [V^j,W]$.

Der Beweis bleibe dem Leser überlassen.

Folgerung: Betrachten wir $k = kU, kO, kSO$, so ist es für die Menge der Kohomologie-Operationen $k \longrightarrow k$

gleichgültig, ob wir die k-Theorie für endliche oder beliebige CW-Komplexe untersuchen. Das folgt aus 1.

2.7. Jede natürliche Transformation $t: K \longrightarrow K$ induziert vermöge ϱ eine natürliche Transformation $u: k \longrightarrow k$, nämlich zunächst wenn wir k als Funktor auf der Kategorie der endlichen CW-Komplexe auffassen (ϱ ist dann isomorph) und nach 2.6., wenn wir k als Funktor auf der Kategorie aller CW-Komplexe auffassen. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} KX & \xrightarrow{\varrho} & kX \\ \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ KX & \xrightarrow{\varrho} & kX \end{array}$$

ist für jeden CW-Komplex X kommutativ. [2)]

2.8. Durch die Forderung, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{k}X & \xrightarrow{\beta} & \tilde{k}(S^2 \wedge X) \\ \vdots{\scriptstyle BT} & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ \tilde{k}X & \xrightarrow{\beta} & \tilde{k}(S^2 \wedge X) \end{array}$$

möge kommutativ sein, können wir jeder Operation $T: \tilde{k} \longrightarrow \tilde{k}$ ~~mit $To = o$~~ eine Operation BT zuordnen (β Bott-scher Isomorphismus). Wir erhalten dadurch eine Abbildung $B: \tilde{k}(B_U) \longrightarrow \tilde{k}(B_U)$.

Lemma: B ist stetig. (Für B_U fallen D- und E-Topologie zusammen).

Beweis: Sei $S_n = \text{Kern}\,(k(B_U) \longrightarrow k(B_U^n))$. T liegt genau dann in S_n, wenn T auf allen $\tilde{k}Y$ mit $\dim Y \leq n$ trivial

wirkt. Es folgt $BS_{n+2} \subset S_n$ und damit die Stetigkeit von B.

2.9. Ist $x \in \tilde{k}X$, X zusammenhängend und $T \in \tilde{k}B_U$, so ist die Abbildung $T \longrightarrow Tx$ stetig (D- oder E-Topologie). Zum Beweis benutze man die in der vorangehenden Nummer gegebene Beschreibung von S_n.

3. EIN NICHT LIMES-FREUNDLICHER RAUM

3.1. Wir haben im vorangehenden nach Bedingungen gefragt, unter denen ein Raum limes-freundlich ist. Zur Abrundung dieser Betrachtung konstruieren wir einen Raum, der nicht limes-freundlich bzgl. k^*U ist. Zunächst stellen wir einige Hilfsmittel bereit. Wir stützen uns auf Ergebnisse der folgenden Abschnitte.

Sei $f_n = f: S^{2n} \longrightarrow B_U$ eine Abbildung, die ein erzeugendes Element von $\pi_{2n}(B_U)$ repräsentiert. Wir wollen den Homomorphismus $f^*: kB_U \longrightarrow kS^{2n}$, $n \geq 1$, berechnen. f repräsentiert ein erzeugendes Element e von $[S^{2n}, B_U] \cong \tilde{k}S^{2n} \cong Z$. σ_1 wird durch die Identität repräsentiert. Also gilt $f^*\sigma_1 = e$. Setzen wir [3]

$$f^*\sigma_i = a_i^n e,$$

so haben wir noch a_i^n für $2 \leq i \leq n$ zu berechnen, da $f_n^*\sigma_{n+j} = 0$ ist für $j > 0$. Mit anderen Worten, wir müssen die Operation σ_i in $\tilde{k}S^{2n}$ berechnen. S^{2n} ist eine Einhängung, $\tilde{k}S^{2n}$ ist torsionsfrei. Wir können also 1o.6. anwenden und erhalten mit $\Psi^k e = k^n e$ (vgl. Adams [1]) die Beziehung

$$a_k^n = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k-1}{j-1} j^{n-1}$$

3.2. Lemma: $\sum_{k=1}^{n} a_k^n = 0, \qquad n > 1.$

Ein topologischer Beweis folgt aus 9.5.

Lemma: Sei p Primzahl. Es gilt für $k \geq 3$

$$a_k^{p+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Beweis:

$$a_k^{p+1} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k-1}{j-1} j^p$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k-1}{j-1} j.$$

Diese letzte Summe ist jedoch für $k \geq 3$ gleich Null, wie man erkennt, wenn man in

$$x^2(1+x)^{k-2} = (1+1/x)^{-2}(1+x)^k$$

den Koeffizienten von x^0 berechnet. (Den ersten Faktor rechts nach Potenzen von $1/x$ entwickeln).

Lemma: $a_n^n = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

Diese Beziehung ist wohlbekannt und folgt auch aus der Formel aus 3.1.

3.3. Sei $f_n: S^{2n} \longrightarrow B_U^{2n} \subset B_U$ eine Abbildung, die ein erzeugendes Element von $\pi_{2n}(B_U)$ repräsentiert. Der Raum Y entstehe aus B_U, indem vermöge f_n für jedes $n \geq 3$ eine $(2n+1)$-Zelle an B_U geheftet wird.

Behauptung: Y ist nicht limes-freundlich.

Beweis: B_U lässt sich als Unterkomplex von Y auffassen. Da Y^m/B_U^m nur aus Zellen ungerader Dimension besteht,

bis auf Nullzellen, ist die Sequenz

$$k^1(Y^m/B_U^m) \xleftarrow{\delta} k(B_U^m) \longleftarrow kY^m \longleftarrow o$$

exakt. Im folgenden sei $m = 2n+1$. Dann ist

$$kY^m \cong \text{Kern } \delta = \bigcap_{j=3}^{n} \text{Kern } f_j^* .$$

Zum Beweis verwende man Sätze aus Puppe [22], §1.

Der durch die Inklusion induzierte Homomorphismus $kB_U \longrightarrow kB_U^m$ $(m = 2n+1)$ ist surjektiv und bildet $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ auf von Null verschiedene Elemente ab, die ebenso bezeichnet werden sollen. σ_k für $k > n$ wird auf Null geworfen. Sei

$$u_m : kB_U^m \longrightarrow Z$$

der durch $u_m \sigma_1 = 1$, $u_m \sigma_2 = -1$, $u_m \sigma_k = o$ (für $k > 2$) und u_m(Produkte der σ) $= o$ bestimmte additive Homomorphismus. Sei $t_m = u_m | kY^m$.

$$\begin{array}{ccc} kY^m & \xrightarrow{\quad t_m \quad} & Z \\ \uparrow & \nearrow_{t_{m+2}} & \\ kY^{m+2} & & \end{array}$$

ist kommutativ.

t_m ist nicht die Nullabbildung; wegen

$$f_j^*\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i \sigma_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i^j e$$

genügt es, ein System $(b_1, o, b_3, \ldots, b_n)$ zu finden, für das $b_1 \neq o$ ist und das die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} b_i a_i^j = o \qquad j = 3, \ldots, n$$

erfüllt (das letztere heisst gerade $\sum b_i \sigma_i \in \bigcap_{j=3}^{n} \text{Kern } f_j^*$).

Dazu betrachten wir das System

$$\sum_{i=3}^{n} a_i^j x_i = -1 \qquad j = 3,\ldots,n,$$

dessen Determinante den Betrag

$$\prod_{i=3}^{n} |a_i^i| = \prod_{i=3}^{n} (i-1)i \neq 0$$

hat (vgl. 3.2.) und das daher eine nicht triviale rationale Lösung $x_3,\ldots, x_n$ hat. Sei b_1 der Hauptnenner der $x_3,\ldots, x_n$. $(b_1, 0, x_3b_1,\ldots, x_nb_1)$ ist dann (wegen $a_1^j = 1$) ein n-tupel der verlangten Art.

Sei nun c_m die kleinste positive Zahl aus Bild t_m. Wir zeigen, dass c_m mit wachsendem m nicht beschränkt bleibt. Da c_n ein Teiler von c_{n+1} ist, folgt die Unbeschränktheit der c_n, wenn wir zeigen können, dass die c_n immer wieder neue Primteiler aufnehmen. Aus dem zweiten Lemma in 3.2. folgt für ein Element $\sum_{j=1}^{p+1} b_j \sigma_j$ aus Kern f_{p+1}^*

$$0 = \sum_{j=1}^{p+1} a_j^{p+1} b_j \equiv a_1^{p+1} b_1 + a_2^{p+1} b_2 \pmod p$$

$$= b_1 + (1 - 2^p) b_2 \equiv b_1 - b_2 \pmod p$$

d.h. $c_{p+1} \equiv 0 \pmod p$.

Da die t_m mit den Inklusionen $kY^{m+2} \longrightarrow kY^m$ verträglich sind, erfüllt (kY^m) nicht die ML-Bedingung. Aus 1.7., Folgerung, folgt, dass Y nicht limes-freundlich ist.

Bemerkung: Heftet man auch noch vermöge f_2 eine 5-Zelle an B_U, so kann man mit dem ersten Lemma in 3.2. zeigen, dass der entstehende Raum limes-freundlich wird. Das Anheften einer einzigen Zelle kann demnach das Limesverhalten beträchtlich ändern.

4. ÜBER DIE KÜNNETH-FORMEL

4.1. Satz: Die Theorien k^*U und k^*O sind multiplikative Kohomologie-Theorien auf der Kategorie aller CW-Komplexe.

Beweis: a) Der Beweis verläuft nach dem in [6] von Atiyah und Hirzebruch angegebenen Muster. Die Ringmultiplikation in $Z \times B_U$ induziert einen Homorphismus

$$a: kX \otimes kY \longrightarrow k(X \times Y)$$

für beliebige Räume X und Y. Daraus erhält man Produkte

$$a: k^{-i}X \otimes k^{-j}Y \longrightarrow k^{-i-j}(X \times Y)$$

für nicht negative i und j. Um diese Produkte auch für beliebige ganze i und j zu bekommen, benötigt man den Bottschen Isomorphismus

$$a: kX \otimes kS^2 \cong k(X \times S^2).$$

(Entsprechendes gilt für die reelle K-Theorie). Die so erhaltenen Produkte sind mit der Einhängung verträglich.

b) Es bleibt der Bottsche Isomorphismus für beliebige CW-Komplexe X zu beweisen. Für endlich-dimensionale CW-Komplexe X, Y ist a im wesentlichen das übliche Produkt $KX \otimes KY \longrightarrow K(X \times Y)$. Es gilt also für solche X der Bottsche Isomorphismus: $k^iX \otimes kS^2 \cong k^i(X \times S^2)$.

Für beliebige Komplexe schliessen wir so: Sei

$$A_1 \xleftarrow{p} A_2 \xleftarrow{p} A_3 \longleftarrow \cdots$$

ein inverses System abelscher Gruppen. Sei

$$d: \prod_{i=1}^{\infty} A_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

der Homorphismus $d(a_1, a_2, \ldots) = (a_1 - pa_2, a_2 - pa_3, \ldots)$.

Dann ist $\lim A_i = \text{Kern } d$ und $\lim^1 A_i = \text{Kokern } d$.

Ist F eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe, so ist der kanonische Homomorphismus

$$(\prod A_i) \otimes F \longrightarrow \prod (A_i \otimes F)$$

ein Isomorphismus. Daraus schliesst man leicht auf die Existenz kanonischer Isomorphismen

$$(\lim A_i) \otimes F \cong \lim (A_i \otimes F)$$

$$(\lim^1 A_i) \otimes F = \lim^1 (A_i \otimes F).$$

Aus dem folgenden Diagramm (D) mit exakten Zeilen entnimmt man, dass $k^*X \otimes kS^2 \cong k^*(X \times S^2)$ ist.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \lim^1 k^*(X^p \times S^2) & \longrightarrow & k^*(X \times S^2) & \longrightarrow & \lim k^*(X^p \times S^2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow & & \uparrow \cong & & \\
0 & \longrightarrow & \lim^1 (k^*X^p \otimes kS^2) & \longrightarrow & k^*X \otimes kS^2 & \longrightarrow & \lim (k^*X^p \otimes kS^2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow = & & \uparrow \cong & & \\
0 & \longrightarrow & (\lim^1 k^*X^p) \otimes kS^2 & \longrightarrow & k^*X \otimes kS^2 & \longrightarrow & (\lim k^*X^p) \otimes kS^2 & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{D}$$

Bemerkung: Um zu zeigen, dass k^* auch für allgemeinere Räume als CW-Komplexe multiplikativ ist, muss man andere Wege einschlagen. Wir gehen darauf in dieser Arbeit nicht ein.

4.2. Satz: Sei X ein beliebiger CW-Komplex und Y ein endlich-dimensionaler CW-Komplex, für den k^*Y endlich erzeugt ist. Dann gibt es eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow k^*X \otimes k^*Y \xrightarrow{a} k^*(X \times Y) \longrightarrow \mathrm{Tor}(k^*X, k^*Y) \longrightarrow 0.$$

Bemerkung: Diese Folge verallgemeinert die von Atiyah in [4] angegebene. Für $Y = S^2$ erhalten wir den in 4.1. betrachteten Bottschen Isomorphismus. Wir haben diesen Fall vorher erledigt, weil wir im Beweis des Satzes verwenden wollen, dass k^* eine multiplikative Theorie ist.

Beweis: a) Sei zunächst k^*Y frei und X endlich-dimensional. Dann lässt sich der Beweis v.[4], Lemma 1, übertragen, und man erhält einen Isomorphismus

$$a: k^*X \otimes k^*Y \cong k^*(X \times Y).$$

b) Sei X beliebig, aber k^*Y frei. Wir schliessen jetzt unter Verwendung von a) wie in 4.1., Teil b) (k^*Y statt kS^2 verwendend) auf einen Isomorphismus $k^*X \otimes k^*Y \cong k^*(X \times Y)$.

c) In den Beweisschritten a) und b) haben wir nur benutzt, dass k^*Y endlich erzeugt ist, aber nicht vorausgesetzt, dass Y endlich-dimensional ist. Falls das letztere eintritt, so lässt sich Y in einen Komplex A einbetten - $f: Y \subset A$ - , wobei k^*A frei und endlich erzeugt ist und $f^*: k^*A \longrightarrow k^*Y$ surjektiv ist (Beweis wie Lemma 2 von [4]). Dies vorausgeschickt, lässt sich der Beweis von Atiyah durchführen und man gelangt zur behaupteten exakten Folge.

4.3. Seien A und B topologische Ringe, deren Topologie durch ein Fundamentalsystem von Umgebungen der Null gebildet wird, das aus Idealen besteht. Durchläuft

V bzw. W ein solches Fundamentalsystem von A bzw. B, so bilden

$$\text{Bild}\,(V \otimes B) + \text{Bild}\,(A \otimes W)$$

ein Fundamentalsystem von Umgebungen der Null in $A \otimes B$. $A \otimes B$ versehen wir mit der dadurch bestimmten Topologie. $A \otimes B$ ist dann ein topologischer Ring. Seine Komplettierung bezeichnen wir mit $A \hat{\otimes} B$.

4.4. Satz: Seien X und Y CW-Komplexe, für welche die inversen Systeme (k^*X^p) und (k^*Y^p) von endlichem Typ sind und die (ML)-Bedingung erfüllen. Dann ist

$$\hat{a} : k^*X \hat{\otimes} k^*Y \longrightarrow k^*(X \times Y)$$

injektiv. Ist überdies k^1X und k^1Y Null, so haben wir einen Isomorphismus

$$k^oX \hat{\otimes} k^oY \xrightarrow{\cong} k^o(X \times Y).$$

An dieser Stelle und später benötigen wir den Hilfssatz: Die inversen Systeme (A_i) und (B_i) mögen die (ML)-Bedingung erfüllen. Sei $A = \lim A_i$; sei $A_i' = \text{Kern}\,(A \longrightarrow A_i)$. Die kanonischen Abbildungen

$$a_i : A/A_i' \longrightarrow A_i$$

induzieren einen Isomorphismus $\lim A/A_i' \longrightarrow \lim A_i$. B, B_i', b_i seien entsprechend definert. Behauptung: Die

$$a_i \otimes b_i : A/A_i' \otimes B/B_i' \longrightarrow A_i \otimes B_i$$

induzieren einen Isomorphismus

$$A \hat{\otimes} B = \lim(A/A_i' \otimes B/B_i') \longrightarrow \lim(A_i \otimes B_i).$$

Der Beweis bleibe dem Leser überlassen.

Beweis des Satzes:

$$k^*X^p \otimes k^*Y^p \longrightarrow k^*(X^p \times Y^p)$$

ist injektiv. $X \times Y$ ist limes-freundlich (vgl.1.8.). Ein inverser Limes injektiver Abbildungen ist injektiv. Unter Verwendung des Hilfssatzes folgt die erste Behauptung des Satzes. Für den Beweis der zweiten Behauptung haben wir uns auf Grund der exakten Sequenz

$$k^*X \hat{\otimes} k^*Y \longrightarrow k^*(X \times Y) \longrightarrow \lim \mathrm{Tor}(k^*X^p, k^*Y^p)$$

davon zu überzeugen, dass

$$\lim \mathrm{Tor}(k^oX^p, k^1Y^p) = o$$

$$\lim \mathrm{Tor}(k^1X^p, k^oY^p) = o$$

ist. Da (k^1Y^p) die (ML)-Bedingung erfüllt und $k^1Y = \lim k^1Y^p = o$ ist, muss für genügend grosses, von p abhängiges q der Homorphismus

$$k^1Y^{p+q} \longrightarrow k^1Y^q$$

die Nullabbildung sein. Es folgt die Behauptung.

Bemerkung: Sind X und Y klassifizierende Räume von kompakten Lieschen Gruppen, so haben wir einen Isomorphismus $kX \hat{\otimes} kY \longrightarrow k(X \times Y)$. Zum Beweis verwende man den Isomorphismus $kB_G \cong \hat{R}(G)$ (der nach unveröffentlichten Ergebnissen von Atiyah auch für nicht zusammenhängende G gilt).

4.5. Satz: Seien

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \quad \text{und} \quad X = \cup X_i$$

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \quad \text{und} \quad Y = \cup Y_i$$

CW-Komplexe. Die Systeme (k^*X_i), (k^*Y_i), $(k^*X_i^n \mid n \geq o)$ und $(k^*Y_i^n \mid n \geq o)$ mögen (ML) erfüllen. Sei für $i \geq 1$

$k^*X_i \hat{\otimes} k^*Y_i \longrightarrow k^*(X_i \times Y_i)$ ein Isomorphismus. Sei $\lim k^*(X_i \times Y_i) \cong k^*(X \times Y)$. ($k^*X_i$ trage die D-Topologie; $k^*X = \lim k^*X_i$ die Limestopologie). Dann gilt:

$$k^*X \hat{\otimes} k^*Y \longrightarrow \lim k^*(X_i \times Y_i)$$

ist ein Isomorphismus.

Bemerkung: Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn $X_i = Y_i = \mathcal{B}_{G(i)}$, $G(i) \subset G(i+1) \subset \ldots$, $G(i)$ kompakte Liesche Gruppe; und wenn dann $(k\mathcal{B}_{G(i)})$ (ML) erfüllt.

Beweis: Wir schreiben im Verlauf des Beweises k statt k^*.

Seien a_i: $kX \longrightarrow kX_i$, b_i: $kY \longrightarrow kY_i$, c_i: $k(X \times Y) \to k(X_i \times Y_i)$ durch die Inklusion induziert. Aus dem kommutativen Diagramm (A)

(A)
$$\begin{array}{ccccc} kX \otimes kY & & \xrightarrow{a_i \otimes b_i} & kX_i \otimes kY_i & \xrightarrow{t} kX_i \hat{\otimes} kY_i \\ \downarrow a & & & & \downarrow \cong \\ k(X \times Y) & & \xrightarrow{c_i} & & k(X_i \times Y_i) \end{array}$$

(t kanonische Abbildung eines Raumes in seine Komplettierung) erhalten wir durch Übergang zum Limes das kommutative Diagramm (B):

(B)
$$\begin{array}{ccc} kX \otimes kY & \longrightarrow & \lim (kX_i \hat{\otimes} kY_i) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ k(X \times Y) & \longrightarrow & \lim k(X_i \times Y_i). \end{array}$$

Wir wollen zeigen, dass nach Komplettierung von (B) in der oberen Zeile ein Isomorphismus steht.

kX hat ein abzählbares Fundamentalsystem von Umgebungen der Null. Als ein solches können die Mengen

$$X_{in} = \text{Kern}\,(kX \longrightarrow kX_i^n)$$

dienen. Das führt zur Gleichung

$$kX \hat{\otimes} kY = \lim_{i,n} (kX/X_{in} \otimes kY/Y_{in})$$

$$= \lim_{i} (kX/X_{ii} \otimes kY/Y_{ii}).$$

Setzen wir $X'_{in} = \text{Kern}\,(kX_i \longrightarrow kX_i^n)$, so gewinnen wir die Beziehungen

$$\lim (kX_i \hat{\otimes} kY_i) = \lim_{i} \lim_{n} (kX_i/X'_{in} \otimes kY_i/Y'_{in})$$

$$= \lim_{i,n} (kX_i/X'_{in} \otimes kY_i/Y'_{in})$$

$$= \lim_{i} (kX_i/X'_{ii} \otimes kY_i/Y'_{ii}).$$

Das System $(kX_i^i \mid i \geq 1)$ erfüllt die Bedingung (ML). Nehmen wir das als bewiesen an, so induzieren die kanonischen Abbildungen $kX/X_{ii} \longrightarrow kX_i^i$, $kX_i/X'_{ii} \longrightarrow kX_i^i$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} kX \hat{\otimes} kY & \longrightarrow & \lim (kX_i \hat{\otimes} kY_i) \\ \| & & \| \\ \lim (kX/X_{ii} \otimes kY/Y_{ii}) & \longrightarrow & \lim (kX_i/X'_{ii} \otimes kY_i/Y'_{ii}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \lim (kX_i^i \otimes kY_i^i). & \end{array}$$

Die beiden schrägen Abbildungen sind nach dem Hilfssatz aus 4.4. Isomorphismen, also ist auch die waagerechte Abbildung bijektiv. Es folgt die Behauptung des Satzes. Wir überlassen dem Leser den Beweis des folgenden Hilfssatzes: Sei $(A_{ij} \mid i,j \geq 1)$ ein inverses System abelscher Gruppen. Sei $A_i = \lim A_{ij}$. Für jedes i erfülle $(A_{ij} \mid j \geq 1)$ (ML). (A_i) erfülle (ML). Dann erfüllen $(A_{ii} \mid i \geq 1)$ und (A_{ij}) die Bedingung (ML).

Bemerkung: Sei die Gruppe G Limes von kompakten Lieschen Gruppen $G(1) \subset G(2) \subset \ldots$. $(kB_{G(i)} \mid i \geq 1)$ erfülle (ML). Dann gibt uns der voranstehende Satz einen Isomorphismus

$$kB_G \hat{\otimes} kB_G \cong k(B_G \times B_G).$$

5. BERECHNUNG VON $k(B_G)$

Wir referieren Ergebnisse von Atiyah und Hirzebruch [6] und bringen einige Ergänzungen.

5.1. Sei G eine kompakte Liesche Gruppe, R(G) der Darstellungsring von G und $\varepsilon: R(G) \longrightarrow Z$ der Homomorphismus, der jeder Darstellung ihren Grad zuordnet. Wir setzen $I(G) = \text{Kern } \varepsilon$ und geben R(G) die I(G)-adische Topologie.

$$\hat{R}(G) = \lim R(G)/I^n(G)$$

ist eine Komplettierung von R(G). Ein stetiger Homomorphismus $h: G \longrightarrow H$ induziert einen stetigen Homomorphismus $h^*: R(H) \longrightarrow R(G)$ und damit auch eine homomorphe Abbildung von $\hat{R}(H)$ in $\hat{R}(G)$, die wir ebenfalls mit h^* bezeichnen.

5.2. Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex und E ein G-Prinzipalbündel über X. Jeder Darstellung $d: G \longrightarrow U(n)$ ordnen wir die Klasse des Bündels dE in K(X) zu (vgl. Borel - Hirzebruch [9], 6.5.). Dadurch wird ein Homomorphismus $r'(E): R(G) \longrightarrow K(X)$ induziert. Sei r(E)

die Zusammensetzung $r(E)\colon R(G) \xrightarrow{\tau'(E)} K(X) \xrightarrow{\varphi} k(X)$.

$r(E)$ ist stetig, wenn wir $k(X)$ die D-Topologie geben (also auch stetig, wenn $k(X)$ die E-Topologie trägt (vgl. 2.4.)). $r(E)$ induziert einen Homomorphismus

$$\hat{r}(E)\colon \hat{R}(G) \longrightarrow \hat{k}(X)$$

($\hat{}$ bezeichne die Komplettierung).

5.3. Ist X limes-freundlich (vgl. 1.7.), so können wir $\hat{k}(X)$ mit $k(X)$ identifizieren. Ist G eine kompakte Liesche Gruppe, so ist B_G limes-freundlich (vgl. Anderson [2], 4.1.). Aus Arbeiten von Atiyah und Hirzebruch [5], [6] entnehmen wir, dass

$$\hat{r}_G := \hat{r}(E_G)\colon \hat{R}(G) \longrightarrow k(B_G)$$

ein topologischer Isomorphismus ist, falls G zusammenhängend oder endlich ist; E_G sei dabei ein universelles G-Prinzipalbündel. Wir identifizieren manchmal die beiden Ringe vermöge $\hat{r}$.

5.4. $\hat{r}$ ist "natürlich" in folgendem Sinne: Sei $h\colon G \longrightarrow H$ ein stetiger Homomorphismus. Er induziert eine Abbildung $Bh\colon B_G \longrightarrow B_H$. Es gilt die Beziehung

$$(Bh)^* E_H = h\, E_G,$$

wenn wir mit einem Stern auch das Induzieren von Bündeln bezeichnen (vgl. auch 5.2.). Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\begin{array}{ccc} \hat{R}(G) & \xrightarrow{\hat{r}_G} & k(B_G) \\ \uparrow{\scriptstyle h^*} & & \uparrow{\scriptstyle Bh^*} \\ \hat{R}(H) & \xrightarrow{\hat{r}_H} & k(B_H) \end{array}$$

kommutativ.

5.5. Sei $d: G \longrightarrow U(m)$ eine Darstellung einer kompakten, zusammenhängenden Lieschen Gruppe G. d induziert die Zusammensetzung

$$e: B_G \xrightarrow{Bd} B_{U(m)} \longrightarrow \{o\} \times B_U \subset Z \times B_U.$$

Bezeichnen wir mit m die triviale m-dimensionale Darstellung von G, so wird $\hat{r}_G(d - m) \in kB_G$ durch e repräsentiert.

Beweis: $d - m \in R(G) \subset \hat{R}(G)$.

$$\hat{r}_G(d - m) = \varsigma((d - m)E_G) = \varsigma(Bd)^* E_{U(m)} - \varsigma(Bd)^* m$$
$$= \varsigma(Bd)^* E_{U(m)} - m,$$

wenn wir mit m auch die Klasse des m-dimensionalen trivialen Bündels bezeichnen. Nach Definition von ς wird aber das letzte Element durch e repräsentiert.

5.6. Sei T(n) der maximale Torus von U(n), der aus den Diagonalmatrizen besteht. Wir verwenden die durch

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \in U(n)$$

angedeuteten Einbettungen $i_{n,k} = i: U(n) \longrightarrow U(n+k)$ und setzen speziell $i_{n,1} = i_n$. i induziert Einbettungen $T(n) \longrightarrow T(n+k)$, die wir ebenfalls mit i bezeichnen. Der Limes der Folgen $\ldots U(n) \subset U(n+1) \subset \ldots$ bzw. $\ldots T(n) \subset T(n+1) \subset \ldots$ sei U bzw. T. $j: T \subset U$, $j_n: T(n) \subset U(n)$ bezeichne die Inklusionen. Aus [6] entnehmen wir, dass $J_n := Bj_n^*: kB_{U(n)} \longrightarrow kB_{T(n)}$ injektiv ist. $kB_{T(n)}$ ist isomorph zum Ring $Z[[\mu_1, \ldots, \mu_n]]$ der formalen Potenzreihen in $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Bild J_n besteht

genau aus den in $\mu_1, \dots, \mu_n$ symmetrischen Potenzreihen. $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ seien die Urbilder (bzgl. J_n) der elementarsymmetrischen Polynome. Ist $D_i\colon T(n) \to U(1)$ die Darstellung $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \to a_i$,

so wird der Isomorphismus

$$Z[[\mu_1, \dots, \mu_n]] \longrightarrow \hat{R}(T(n)) = k(B_{T(n)})$$

durch $\mu_i \longrightarrow D_i - 1$

gegeben. Es folgt: $\mu_1 + \dots + \mu_n$ wird durch $j_n - n$ gegeben.

5.7. Aus 5.4. und 5.6. folgt

$$\begin{aligned} J_n\, \hat{r}_{U(n)}(id_{U(n)} - n) &= \hat{r}_{T(n)}(Bj_n)^*(id_{U(n)} - n) \\ &= \hat{r}_{T(n)}(j_n - n) \\ &= \mu_1 + \dots \mu_n \quad . \end{aligned}$$

Also ist $\hat{r}_{U(n)}(id_{U(n)} - n) = \sigma_1$, so dass nach 5.5. σ_1 durch die Abbildung

$$B_{U(n)} \subset B_U = o \times B_U \subset Z \times B_U$$

repräsentiert wird.

5.8. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} kB_{U(n)} & \xrightarrow{\quad J_n \quad} & kB_{T(n)} \\ \uparrow{\scriptstyle Bi_n^*} & & \uparrow{\scriptstyle Bi_n^*} \\ kB_{U(n+1)} & \xrightarrow{\quad J_{n+1} \quad} & kB_{T(n+1)} \end{array} .$$

Es gilt

$$Bi_n^*\, \mu_k = \begin{cases} \mu_k & \text{für } k \leq n \\ o & \text{für } k = n+1 \end{cases}$$

und folglich $$Bi_n^* \sigma_k = \begin{cases} \sigma_k & \text{für } k \leq n \\ 0 & \text{für } k = n+1. \end{cases}$$

T bzw. U ist Limes der T(n) bzw. U(n) bzgl. der Einbettungen i_n. Es gilt

$$kB_U \cong \lim kB_{U(n)}; \quad kB_T \cong \lim kB_{T(n)};$$

das folgt aus $k^{-1}B_G = 0$ für eine kompakte (zush.) Liesche Gruppe G und der exakten Sequenz von Milnor [19] (vgl. auch 1.7.). Der inverse Limes der J_n liefert eine injektive Abbildung $J: kB_U \longrightarrow kB_T$. Wir haben Isomorphismen

$$kB_U \cong Z[[\sigma_1, \sigma_2, \ldots]]$$

$$kB_T \cong Z[[\mu_1, \mu_2, \ldots]]$$

und $J\sigma_k$ ist die k-te elementarsymmetrische Funktion in den $\mu_1, \mu_2, \ldots$.

5.9. σ_1 wird durch die Identität von B_U repräsentiert. Das folgt aus 5.7. und 5.8.

5.10. Die spezielle orthogonale Gruppe SO(2n+1) hat den Rang n. Sei T(n) ein maximaler Torus von SO(2n+1). Das Bild der kanonischen Abbildung $RSO(2n+1) \longrightarrow RT(n)$ wird von den elementarsymmetrischen Funktionen in den $(D_i + 1/D_i)$ $(i = 1, .., n)$ erzeugt. Das erkennt man z.B., wenn man die Operation der Weylschen Gruppe von SO(2n+1) auf RT(n) untersucht (man hat die invarianten Elemente zu bestimmen). Sei τ_k die k-te elementarsymmetrische Funktion in den $(D_i + 1/D_i - 2)$. Dann ist

$$RSO(2n+1) \cong Z[\tau_1, \ldots, \tau_n]$$

Wie im vorangehenden für B_U schliesst man auf

$$kB_{SO} \cong Z[[\tau_1, \tau_2, \ldots]].$$

τ_1 entspricht der Einbettung $C: B_{SO} \to B_U$, die aus $SO(k) \subset U(k)$ hervorgeht. Mit λ_k bezeichnen wir die k-te äussere Potenz.

Lemma: $$\lambda_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{2n+1-2j}{k-j} \tau_j$$

Beweis: Bei der Einbettung $RSO(2n+1) \to RT(n)$ geht λ_k über in die k-te elementarsymmetrische Funktion in den $D_1, 1/D_1, \ldots, D_n, 1/D_n, 1$. Sei ${}^*\tau_k$ die k-te elementarsymmetrische Funktion in den $D_1 + 1/D_1, \ldots, D_n + 1/D_n$. Einfache kombinatorische Überlegungen führen dann auf die Beziehungen [4]

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{n-k+2j}{j} {}^*\tau_{k-2j}$$

und

$${}^*\tau_k = \sum_{j=0}^{k} 2^{k-j} \binom{n-j}{k-j} \tau_j .$$

Ineinander eingesetzt führen sie auf

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{k} \left[\sum_{i=0}^{k-j} \binom{n-k+i}{[i/2]} \binom{n-j}{k-i-j} 2^{k-i-j} \right] \tau_j .$$

Wir wollen einsehen, dass der in der grossen Klammer stehende Ausdruck gleich $(2n+1-2j, k-j)$ ist. Es genügt, den Fall $j = o$ zu betrachten. (Man ersetze danach n durch $n - j$ und k durch $k - j$). Der Koeffizient von τ_o ist aber der Grad der Darstellung λ_k, und dieser ist $(2n+1, k)$.

$RSO(2n+1)$ ist auch der Polynomring in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (Vgl. Boerner [1o], insbesondere Satz 14.1. und Milnor [2o]).

Wir betrachten den Homomorphismus

$$C^*: kB_U \longrightarrow kB_{SO} .$$

Lemma: $c^* \sigma_k = \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} \binom{s}{k-s} \tau_s$.

Beweis: Bezeichnen wir die k-te äussere Potenz in RU(2n+1) auch mit λ_k, so gilt

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{2n+1-j}{k-j} \sigma_j$$

und $c^* \lambda_k = \lambda_k$. Mit Hilfe des ersten Lemmas gelangt man durch Umrechnen zur Behauptung (Induktion nach k).

c^* ist surjektiv. Daraus kann man schliessen, dass sich jede Operation $kSO \longrightarrow kU$ über die Komplexifizierung $c: kSO \longrightarrow kU$ faktorisieren lässt.

6. DIE HOPFALGEBRA kB_G

6.1. Sei G eine Gruppe, für die wir einen Isomorphismus [5] $m_{B_G} : kB_G \hat{\otimes} kB_G \tilde{=} k(B_G \times B_G)$ haben (vgl. die Bemerkungen in 4.4. und 4.5.). Für G kommen z.B. U, T, SO, Sp in Frage. Trägt B_G eine H-Raum-Struktur mit der Verknüpfung

$$a: B_G \times B_G \longrightarrow B_G,$$

so bezeichnen wir mit Δ_G die Zusammensetzung

$$kB_G \xrightarrow{a^*} k(B_G \times B_G) \cong kB_G \hat{\otimes} kB_G.$$

In Analogie zu ähnlichen Verhältnissen in der gewöhnlichen Kohomologie können wir sagen, dass Δ_G den (topologischen) Ring kB_G zu einer (topologischen) Hopfalgebra ergänzt. Wir gehen darauf nicht näher ein.

A. Untersuchung von kB_U

6.2. Wir wollen Abbildungen a_U und a_T konstruieren,

die das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccc} B_U \times B_U & \xrightarrow{a_U} & B_U \\ \uparrow{\scriptstyle Bj \times Bj} & & \uparrow{\scriptstyle Bj} \\ B_T \times B_T & \xrightarrow{a_T} & B_T \end{array} .$$

a_U soll ausserdem die gegebene Addition in $k(X)$ induzieren (vgl. 5.4., 5.5. für die Bezeichnungen).

Sei $b_n\colon U(n) \times U(n) \longrightarrow U(2n)$ die folgende homomorphe Einbettung

$$(a_{ij}), (c_{ij}) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & \cdots \\ 0 & c_{11} & 0 & c_{12} \cdots \\ a_{21} & 0 & a_{22} & \cdots \\ 0 & \cdot z \cdot & \cdots & \end{pmatrix}$$

Es gilt $b_n(T(n) \times T(n)) \subset T(2n)$. $T(n)$ war der maximale Torus der Diagonalmatrizen von $U(n)$. Die b_n sind mit den Einbettungen $i = i_{n,k}$ (5.6.) verträglich, d.h.

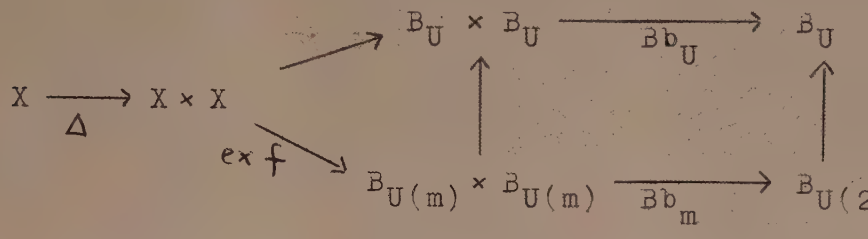
$$\begin{array}{ccc} U(n) \times U(n) & \xrightarrow{b_n} & U(2n) \\ \downarrow{\scriptstyle i \times i} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ U(n+1) \times U(n+1) & \xrightarrow{b_{n+1}} & U(2n+2) \end{array}$$

ist kommutativ. Gehen wir zum Limes über, so erhalten wir aus den b_n Homomorphismen b_U und b_T, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \times U & \xrightarrow{b_U} & U \\ \uparrow{\scriptstyle j \times j} & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ T \times T & \xrightarrow{b_T} & T \end{array}$$

kommutativ machen. Wir setzen (vgl. 5.4.) $a_U = Bb_U$, $a_T = Bb_T$.

6.3. a_U liefert die gewünschte H-Raum-Struktur in B_U. Zum Beweis ist zu zeigen: Ist X ein endlicher CW-Komplex und werden durch $e, f: X \longrightarrow B_{U(m)} \subset B_U$ zwei m-dimensionale Bündel E und F bestimmt, so bestimmt $e+f = a_U(e \times f)\Delta$ das Bündel $E \oplus F$. Der Beweis folgt aus dem (homotopie-kommutativen) Diagramm



6.4. Wir wollen die Abbildung Δ_T berechnen (6.1.). Sei $p_i: B_T \longrightarrow B_{T(1)}$ induziert durch die Projektion von T auf den i-ten Faktor T(1). Es ist $kB_{T(1)} = Z[[\mu]]$ und die in 5. erklärten μ_i haben die Eigenschaft

$$\mu_i = p_i^* \mu .$$

Sind $pr_1, pr_2: B_T \times B_T \longrightarrow B_T$ die beiden Projektionen, so erklären wir Elemente $\mu_{i,j}$ in $k(B_T \times B_T)$ durch $\mu_{i,j} = (pr_j)^* p_i^* \mu$. Es gilt dann

$$mB_T (\mu_i \otimes 1) = \mu_{i,1}$$
$$mB_T (1 \otimes \mu_i) = \mu_{i,2} .$$

(Das Bild von $a \otimes b \in A \otimes B$ bei der kanonischen Abbildung $A \otimes B \longrightarrow A \hat{\otimes} B$ bezeichnen wir wieder mit $a \otimes b$.) Aus der Definition von b_T und a_T (6.2.) folgt, dass $p_{2i-1} a_T \simeq p_i\, pr_1$ ist. ($b_n: T(n) \times T(n) \longrightarrow T(2n)$ ist ein Isomorphismus, der die Faktoren vertauscht!) Daraus erhält man $a_T^* \mu_{2i-1} = \mu_{i,1}$. Entsprechend folgt $a_T^* \mu_{2i} = \mu_{i,2}$. Wir fassen zusammen:

Lemma: $\Delta\mu_{2i-1} = \mu_i \otimes 1$

$\Delta\mu_{2i} = 1 \otimes \mu_i$ $\qquad i \geq 1$.

Man erkennt aus diesen Gleichungen, dass Δ weder assoziativ noch kommutativ ist.

6.5. Lemma: Δ_U wird gegeben durch

$$\Delta_U \sigma_k = \sum \sigma_i \otimes \sigma_{k-i} \,, \quad 0 \leq i \leq n, \ \sigma_0 = 1.$$

Beweis: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} kB_T & \xrightarrow{\Delta_T} & kB_T \hat{\otimes} kB_T \\ \uparrow J & & \uparrow J \hat{\otimes} J \\ kB_U & \xrightarrow{\Delta_U} & kB_U \hat{\otimes} kB_U \end{array}$$

ist kommutativ (J aus 5.8.). Die senkrechten Abbildungen sind injektiv. Sei $k > 0$. Ist

$$s_k = \sum \mu_{t_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{t_k} \qquad (t_1 < \ldots < t_k)$$

die k-te elementarsymmetrische Funktion in den μ, so müssen wir nur Δs_k nach dem Lemma in 6.4. berechnen und das Ergebnis wieder durch die elementarsymmetrischen Funktionen ausdrücken. Nun hat

$$\Delta(\mu_{t_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{t_k})$$

die Gestalt

$$\mu_{u_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{u_i} \otimes \mu_{v_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{v_1}, \qquad i+j = k,$$

wobei $u_1 < \ldots < u_i$, $v_1 < \ldots < v_j$ und die u aus den ungeraden t, die v aus den geraden t hervorgehen, wie es in 6.4. beschrieben ist. Jedes Paar solcher Systeme u, v tritt aber genau einmal auf. Für $k = 0$ ist die Formel offenbar richtig.

B. Zusammenhang mit den Operationen λ und γ von Grothendieck.

6.6. Die k-te äussere Potenz von Vektorraumbündeln induziert eine Operation

$$E^k : K \longrightarrow K, \qquad k \geq 1$$

die wir auch äussere Potenz nennen wollen (vgl. Grothendieck [16], 4. und Atiyah [3], §2; E^k heisst dort λ^k. Siehe auch 12.). Sie induziert nach 2.7. eine Operation $k \longrightarrow k$, die wir ebenfalls mit E^k bezeichnen. E^0 sei die Operation, die durch $E^0 x = 1$, $x \in kX$, gegeben ist. E^1 ist die Identität. Die äusseren Potenzen haben die Eigenschaften

$$E^n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} E^i x \, E^{n-i} y$$

$$E^n x = 0,$$

falls x ϱ-Bild (vgl. 2.) eines m-dimensionalen Vektorraumbündels und $n > m$. Ferner erklären wir Operationen F^n durch

$$F^n x = E^n(x+n-1).$$

Für die F^n gelten dann die Beziehungen

$$F^0 = E^0, \quad F^1 = E^1, \quad F^n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} F^i x \cdot F^{n-i} y.$$

(vgl. [3]; F^n heisst dort γ^n). Ist x ϱ-Bild eines m-dimensionalen Bündels, so gilt

$$F^n(x - m) = 0 \qquad \text{für} \quad n > m$$

(vgl [3], 2.3.). Explizit lauten die Beziehungen zwischen den E und den F: $E^k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k-1}{j-1} F^j$

$F^k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} E^j \qquad (k \geq 1).$

6.7. Eine Operation T: $k \to k$ wird durch eine Abbildung $f: Z \times B_U \longrightarrow Z \times B_U$ induziert. f zerfällt in eine Folge von Abbildungen

$$f_n: \quad n \times B_U \longrightarrow \varphi_n \times B_U .$$

f_n möge n-Komponente von f heissen und ihre Homotopieklasse $T_n = [f_n]$ n-Komponente von T. Wir wollen die o-Komponente von F^j bestimmen.

Satz: $(F^j)_o = \sigma_j$.

Beweis: σ_1 wird durch die "Identität" $B_U \to o \times B_U$ repräsentiert. Wir müssen also $F^j \sigma_1$ berechnen, und dazu genügt es $F^j(\Sigma \mu_i)$ in kB_T zu bestimmen. Nach den angegebenen Eigenschaften der F^j ist

$$F^j\Big(\sum_1^n \mu_i\Big) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = j} F^{k_1}(\mu_1) \cdots F^{k_n}(\mu_n).$$

Ist $n > j$ und berücksichtigt man $F^o(\mu_i) = 1$, $F^1(\mu_i) = \mu_i$ und $F^k(\mu_i) = o$ für $k > 1$, so steht auf der rechten Seite der obigen Gleichung gerade die j-te elementarsymmetrische Funktion in den μ_i. Der Übergang $n \to \infty$ liefert die Behauptung.

Der Regel für die Berechnung von $F^n(x + y)$ entspricht vermöge des letzten Satzes die Gestalt der Komultiplikation Δ_U (vgl. 6.5.).

C. Über kB_{SO}

6.8. Die voranstehenden Überlegungen lassen sich auch in anderen Fällen durchführen. Verwendet man den maximalen Torus von SO(2n+1), der aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{n-1} \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} \cos x_i & \sin x_i \\ -\sin x_i & \cos x_i \end{pmatrix} = A_i$$

besteht und schachtelt entsprechend wie in 3.6. – nur jetzt Zweierkästchen –, so erhält man einen Homomorphismus b_{SO}, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} SO \times SO & \xrightarrow{b_{SO}} & SO \\ \uparrow \nu & & \uparrow \nu \\ T \times T & \xrightarrow[b_T]{} & T \end{array}$$

kommutativ macht und der beim Übergang zu den klassifizierenden Räumen die "richtige" Addition in B_{SO} induziert. Die Komultiplikation in kB_{SO} berechnet sich zu

$$\Delta \tau_k = \sum_{i=0}^{k} \tau_i \otimes \tau_{k-i}, \qquad \tau_0 = 1 \text{ (vgl.5.1o.)}$$

7. ADDITIVE OPERATIONEN

Wir bestimmen die additiven Operationen $kU \longrightarrow kU$ und $kSO \longrightarrow kU$. Sie lassen sich durch ihre Wirkung auf $kU(CP^\infty)$ bzw. $kSO(CP^\infty)$ kennzeichnen. Zusammenfassung der Ergebnisse in 7.5.

7.1. Seien H_i $(i = 1, 2)$ H-Räume mit den Verknüpfungen $a_i: H_i \times H_i \longrightarrow H_i$. H_i sei wegzusammenhängend. Die additive Gruppe der ganzen Zahlen Z fassen wir als H-Raum auf und geben $Z \times H_i$ die Produktstruktur. Die Verknüpfung heisse wieder a_i. Eine Abbildung $f: Z \times H_1 \longrightarrow Z \times H_2$ heisst additiv, wenn $a_2(f \times f) \simeq f a_1$ ist. f zerfällt in eine Folge

$$f_n : n \times H_1 \longrightarrow \varphi_n \times H_2,$$

da H_1 zusammenhängend ist. Die f_n mögen auch die Komponenten von f heissen. $[X, Z \times H_i]$ trägt eine in

X natürliche Verknüpfung. $n \in [X, Z \times H_i]$ werde durch eine konstante Abbildung $X \longrightarrow n \times H_i$ repräsentiert. Sei X zusammenhängend. Jedes x aus $[X, Z \times H_i]$ lässt sich eindeutig in der Form $x = y + n$ darstellen, wobei y durch eine Abbildung $X \longrightarrow o \times H_i$ repräsentiert wird. x und y sind gleich, aufgefasst als Homotopieklassen $X \longrightarrow H_i$.

Lemma: Sei f additiv. Dann gilt mit einer geeigneten ganzen Zahl q $\varphi_n = qn$. Ausserdem sind die f_n homotop, aufgefasst als Abbildungen $H_1 \longrightarrow H_2$ (vgl. 1.4.).

Beweis: f induziert einen Homomorphismus

$$f_*: [P, Z \times H_1] \longrightarrow [P, Z \times H_2],$$

wobei P der Punktraum ist. Es folgt die erste Behauptung. Ferner betrachten wir den Homomorphismus

$$f_*: [H_1, Z \times H_1] \longrightarrow [H_1, Z \times H_2].$$

Wird x_n durch die "Identität" $H_1 \longrightarrow n \times H_1$ repräsentiert, so gilt $[f_n] = f_* x_n = f_*(x_o + n) = f_o + n$.

Bemerkung: Die additiven Abbildungen $Z \times H_1 \longrightarrow Z \times H_2$ sind also im wesentlichen durch die additiven Abbildungen $H_1 \longrightarrow H_2$ bestimmt (mit f ist natürlich auch f_o additiv).

7.2. Sei H der Raum B_U oder B_{SO}. Eine Abbildung $f: H \longrightarrow B_U$ $(= o \times B_U)$ ist genau dann additiv, wenn das Diagramm (vgl. 6.1.)

$$\begin{array}{ccccc} kB_U & \xrightarrow[\alpha^*]{} & k(B_U \times B_U) & \xleftarrow[m B_U]{} & kB_U \hat{\otimes} kB_U \\ \downarrow f^* & & \downarrow (f \times f)^* & & \downarrow f^* \otimes f^* \\ kH & \xrightarrow[\alpha^*]{} & k(H \times H) & \xleftarrow[m H]{} & kH \hat{\otimes} kH \end{array}$$

kommutativ ist. (a sei Addition in H). Berücksichtigt man $\Delta\sigma_1 = \sigma_1 \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_1$ (vgl. 6.5.) und $\sigma_1 = [\mathrm{id}\, B_U]$, so erkennt man, dass f genau dann additiv ist, wenn gilt $\Delta[f] = [f] \otimes 1 + 1 \otimes [f]$, d.h. wenn $[f]$ ein primitives Element der Hopfalgebra kH ist.

7.3. Sei $h: B_T \longrightarrow H$ die durch die Einbettung $T \subset U$, SO, induzierte Abbildung. Es gilt $ha_T \simeq a(h \times h)$.

Satz: Sei $h^*[f] \in kB_T$ von der Gestalt

$$h^*[f] = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mu_i).$$

Dann ist f additiv.

($P(\mu)$ ist eine Potenzreihe aus $Z[[\mu]]$, deren konstantes Glied Null ist.)

Beweis: Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} kH & \xrightarrow{\Delta} & kH \hat{\otimes} kH \\ \downarrow{\scriptstyle h^*} & & \downarrow{\scriptstyle h^* \hat{\otimes} h^*} \\ kB_T & \xrightarrow{\Delta} & kB_T \hat{\otimes} kB_T. \end{array}$$

Es gilt $(h^* \hat{\otimes} h^*)\Delta[f] = \Delta h^*[f] = \Delta\left(\sum_{i=1}^{\infty} P(\mu_i)\right)$ $= \sum_{i=1}^{\infty} \Delta P(\mu_i)$ und $\Delta P(\mu_i) = \Delta\left(\sum_k a_k \mu_i^k\right) =$ $= \sum a_k \Delta \mu_i^k = \sum a_k (\mu_j^k \otimes 1) = \left(\sum a_k \mu_j^k\right) \otimes 1$ $= P(\mu_j) \otimes 1$, falls $P(\mu_i) = \sum a_k \mu_i^k$ und $i = 2j-1$ (vgl. 6.4.). Rechtfertigung der Rechnung: Die Familien (x_k), (y_k) mit $x_k = P(\mu_k)$, $y_k = a_k \mu_i^k$ sind summierbar. Δ und $x \to x \otimes 1$ sind stetige Homomorphismen der additiven Struktur. Es folgt

$$(h^* \hat{\otimes} h^*)\Delta[f] = \sum_{j=1}^{\infty} P(\mu_j) \otimes 1 + 1 \otimes \sum_{j=1}^{\infty} P(\mu_j)$$
$$= h^*[f] \otimes 1 + 1 \otimes h^*[f] = (h^* \otimes h^*)([f] \otimes 1 + 1 \otimes [f]).$$

Aus der Injektivität von $h^* \hat{\otimes} h^*$ und 7.2. folgt die Behauptung.

7.4. Sei $p_i: B_T \longrightarrow B_{T(1)}$ die i-te Projektion (6.4.). Es gibt ein Element $z \in [B_{T(1)}, H]$ mit den Eigenschaften: $\sum p_i^* z$ existiert bzgl. der E-Topologie (2.4.) in $[B_T, H]$, und es gilt die Gleichung

$$\sum p_i^* z = h^* [id_H].$$

Ist $H = B_U$, so ist $z = \mu \in [B_{T(1)}, H] \subset kB_T$. Ist $H = B_{SO}$, so folgt aus der exakten Homotopiefolge der Faserungen $B_{SO} \longrightarrow B_O \longrightarrow K(Z_2, 1)$, dass die Injektion $B_{SO} \subset B_O$ einen Isomorphismus $[B_T, B_{SO}] \cong [B_T, B_O]$ induziert. Aus den Ergebnissen von Anderson [2] entnimmt man, dass $kO(B_T) \xrightarrow{c} kU(B_T)$ injektiv ist und Bild c aus den bei $\mu_i \longrightarrow 1/(1+\mu_i) - 1$ invarianten Elementen besteht (c = Komplexifizierung). Wir identifizieren $kO(B_T)$ mit Bild c und setzen $[B_T, B_{SO}] = [B_T, B_O] = \tilde{k}O(B_T)$. Dann ist

$$h^* [id_H] = \sum (\mu_i - 1 + 1/(1+\mu_i)),$$

also [6]

$$z = \mu + \frac{1}{1+\mu} - 1 .$$

Satz: Für eine additive Abbildung $f: H \longrightarrow B_U$ ist

$$h^* [f] = \sum P(\mu_i).$$

Beweis: $h^*[f] = f_* h^* [id_H] = f_* \sum p_i^* z = \sum f_* p_i^* z$

$$= \sum p_i^* f_* z = \sum p_i^* P(\mu) = \sum P(\mu_i).$$

Dabei haben wir $f_* z = P(\mu)$ gesetzt. Rechtfertigung: f_* und p_i^* sind stetig.

7.5. Satz: Eine additive Operation $kSO \longrightarrow kU$ bzw. $kU \longrightarrow kU$ ist durch ihren Wert auf $1 + z \in [B_{T(1)}, Z \times H]$ eindeutig bestimmt. Im Falle $H = B_U$ kommt jedes Element aus $kB_{T(1)} = Z[[\mu]]$ als Bild einer Operation vor. Ist aber $H = B_{SO}$, so können wir $[B_{T(1)}, Z \times B_{SO}]$ mit dem Teilring von $Z[[\mu]]$ identifizieren, der aus den Elementen besteht, die bei dem durch $\mu \to \frac{1}{1+\mu} - 1$ bestimmten stetigen Automorphismus von $Z[[\mu]]$ fest bleiben.

Wir identifizieren im folgenden manchmal Operationen mit den charakterisierenden Potenzreihen. Die Addition der Operationen entspricht dann der Addition der Potenzreihen. Wenn es nötig ist, zwischen Operationen und Elementen aus $Z[[\mu]]$ zu unterscheiden, schreiben wir AP für die durch $P \in Z[[\mu]]$ bestimmte Operation.

Unter den Operationen $kU \longrightarrow kU$ spielen die Adamsschen Operationen $(1+\mu)^k$, $k \in Z$, eine besondere Rolle (vgl. 8). Sie erzeugen den Polynomring $Z[\mu] < Z[[\mu]]$ also eine dichte Untermenge der additiven Operationen. Aus den Beziehungen [7]

$$[A(1+\mu)^k](1+\mu)^t = (1+\mu)^{kt}$$

schliesst man auf

$$(A\mu^k)\mu = \mu^k \qquad (A\mu^k)\left(\frac{1}{1+\mu} - 1\right) = \left(\frac{1}{1+\mu} - 1\right)^k.$$

Im Falle der Operationen $kSO \longrightarrow kU$ ist $1 + z = \mu + \frac{1}{1+\mu}$ die Komplexifizierung c. Setzen wir $v_k = \mu^k + \left(\frac{1}{1+\mu} - 1\right)^k$, so lässt sich jede Operation $kSO \longrightarrow kU$ in eine Reihe $a_o + \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$, $a_k \in Z$, entwickeln. Aus den oben

angegeben Formeln entnimmt man jetzt $(A\mu^k)\, c = v_k$, d.h.

Folgerung: Jede additive Operation $kSO \longrightarrow kU$ lässt sich durch Zusammensetzen einer additiven Operation $kU \longrightarrow kU$ mit der Komplexifizierung gewinnen.

Satz: Die Zusammensetzung der additiven Operationen $k \longrightarrow k$ ist kommutativ. Es gilt für $k \leq 1$ 8)

$\mu^k \circ \mu^1 = (1+)\,\mu^1 +$ höhere Potenzen von μ.

8. MULTIPLIKATIVE OPERATIONEN

8.1. Wir wollen diejenigen Operationen $\psi : k \longrightarrow k$ bestimmen, die gleichzeitig für jedes X einen Ringhomomorphismus $\psi X : kX \longrightarrow kX$ ergeben. Wir nennen sie multiplikativ. Es stellt sich heraus, dass nur die Adams-schen Operationen (vgl. Adams [1]) diese Eigenschaft haben. Die multiplikativen Operationen $kSO \longrightarrow kU$ entstehen aus diesen Adams-schen Operationen durch Zusammensetzen mit der Komplexifizierung.

Wenden wir eine multiplikative Operation auf k(Punkt) an, so erkennen wir, dass (mit der Bezeichnung aus 7.1.) $\varphi_n = n$ ist. Es genügt deshalb offenbar, die multiplikativen Elemente aus $[B_U, B_U]$ zu finden.

8.2. Eine multiplikative Operation ist definitionsgemäss auch additiv. Sie lässt sich nach 7.5. durch eine Potenzreihe charakterisieren.

8.3. Sei η das universelle Geradenbündel über $B_{T(1)}$. Es gilt $\varsigma[\eta] = (1+\mu)$. Denn $1+\mu$ gehört zur identischen Darstellung in RT(1); aus der Definition von

$r(\eta)$, $\hat{r}(\eta)$ (vgl.5.2.) und der Definition des Isomorphismus $kB_{T(1)} = Z[[\mu]]$ folgt die Behauptung.

η^2 ist ebenfalls ein Geradenb:undel. Da η Geradenbündel klassifiziert, gibt es eine Abbildung $f: B_{T(1)} \longrightarrow B_{T(1)}$ mit $f^*\eta = \eta^2$. φ ist eine natürliche Transformation und ein Ringhomomorphismus; es folgt $f^*(1+\mu) = (1+\mu)^2$.

Sei Ψ nun eine multiplikative Transformation. Wir setzen $\Psi(1+\mu) = Q(\mu)$ und bekommen aus

$$\begin{aligned} Q^2(\mu) &= (\Psi(1+\mu))^2 = \Psi\left[(1+\mu)^2\right] \\ &= \Psi f^*(1+\mu) = f^* \Psi(1+\mu) \\ &= f^* Q(\mu) = Q(f^*\mu) \\ &= Q(2\mu+\mu^2) \end{aligned}$$

eine Gleichung, der Q genügen muss. (Wir haben in der Rechnung die Multiplikativität von Ψ und die Natürlichkeit von Ψ, die Stetigkeit von f^* und die Summierbarkeit der Familie $(a_k \mu^k)$ benutzt; $Q = \sum a_k \mu^k$).

8.4. Lemma: Eine ganzzahlige Potenzreihe $Q(\mu)$ erfüllt genau dann die Gleichung

$$Q^2(\mu) = Q(2\mu+\mu^2),$$

wenn sie die Gestalt

$$Q_k(\mu) = Q(\mu) = (1+\mu)^k, \qquad k \in Z$$

hat. Es sei $Q_o = 1$, und für negatives k verstehen wir unter $(1+\mu)^k$ die formal binomische Entwicklung dieses Ausdruckes.

Beweis: Wir betrachten zunächst Lösungen $Q(\mu) = \sum a_k \mu^k$ mit $a_1 = o$. Es folgt: $a_k = o$ für $k \geq 1$.

Sei nämlich $a_i = o$ für $1 \leqslant i \leqslant k$. Dann ist der Koeffizient von μ^{k+1} in $Q^2(\mu)$ gleich $2a_{k+1}$ und der Koeffizient von μ^{k+1} in $Q(2\mu + \mu^2)$ gleich $2^{k+1}a_{k+1}$. Gleichheit dieser Koeffizienten ist wegen $k \geqslant 1$ nur für $a_{k+1} = o$ möglich.

Die angegebenen Potenzreihen sind offenbar Lösungen. In Q_k ist $a_1 = k$. Ist Q' irgendeine ganzzahlige Lösung mit $a'_o = 1$ und $a'_1 = k$, so ist Q_k/Q' eine Lösung mit $a_1 = o$. Aus dem anfangs Bewiesenen folgt $Q_k = Q'$.

8.5. ψ^k sei weiterhin die additive Operation mit $\psi^k(1+\mu) = (1+\mu)^k$. Wir wollen zeigen, dass sie multiplikativ ist.

Lemma: Ist $x \in kX$ ς-Bild eines Geradenbündels, so gilt $\psi^k x = x^k$, $k \in Z$.

Beweis: $1+\mu$ ist ς-Bild des universellen Geradenbündels. Die Behauptung folgt jezt aus der Natürlichkeit von ψ^k.

8.6. Die o-Komponente von ψ^k werde durch $f: B_U \longrightarrow B_U$ repräsentiert. ψ^k ist genau dann multiplikativ, wenn $m(f \times f)$ und fm homotop sind. m ist die Multiplikation des Ringobjektes B_U. Wir zeigen:

$$(f \times f)^* m^* \sigma_1 = \psi^k m^* \sigma_1 \in [B_U \times B_U, o \times B_U] \subset k(B_U \times B_U).$$

Wir schreiben $mB_U(a \otimes b) = a \times b$ (Kreuzprodukt). Nach Definition der Multiplikation und der Abbildung mB_U in 6.1. ist $m^* \sigma_1 = mB_U(\sigma_1 \otimes \sigma_1) = \sigma_1 \times \sigma_1$ also

$(f \times f)^* m^* \sigma_1 = m_{B_U}([f] \otimes [f]) = m_{B_U}(\psi^k \sigma_1 \otimes \psi^k \sigma_1) =$
$\psi^k \sigma_1 \times \psi^k \sigma_1$. Es bleibt also das folgende Lemma zu zeigen:

Lemma: $\psi^k(\sigma_1 \times \sigma_1) = \psi^k \sigma_1 \times \psi^k \sigma_1$.

Beweis: Wir gehen von dem folgenden kommutativen Diagramm aus:

$$\begin{array}{ccccc}
kB_U \hat{\otimes} kB_U & \xrightarrow{J \hat{\otimes} J} & kB_T \hat{\otimes} kB_T & & \\
\downarrow{\scriptstyle m_{B_U}} & & \downarrow{\scriptstyle m_{B_T}} & \nwarrow^{\Delta_T} & \\
k(B_U \times B_U) & \xrightarrow{I} & k(B_T \times B_T) & \xrightarrow{A} & kB_T \\
\downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\
k(B_U \times B_U) & \xrightarrow{I} & k(B_T \times B_T) & \xrightarrow{A} & kB_T \,.
\end{array}$$

Darin ist $J = (Bj)^*$, $I = (Bj \times Bj)^*$, $\psi = \psi^k$ und $A = (a_T^*)^{-1}$. Kommutativität des ganzen Diagrammes liefert

$$AI\psi(\sigma_1 \times \sigma_1) = \psi \Delta_T^{-1} J \hat{\otimes} J\,(\sigma_1 \times \sigma_1)$$
$$= \psi \Delta_T^{-1} (\sum \mu_i \otimes 1)(1 \otimes \sum \mu_j)$$

Δ_T ist ein Homorphismus von Algebren. Zieht man das Lemma 6.4. heran, so erkennt man, dass der letzte Ausdruck gleich

$$(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{2i-1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{2j})$$

ist. Aus 8.5. folgt nun die entscheidende Gleichheit

$$\psi(\sum \mu_{2i-1} \cdot \sum \mu_{2j}) = \psi \sum \mu_{2i-1} \cdot \psi \sum \mu_{2j},$$

wenn man bedenkt, dass $1 + \mu_{2i-1}$, $1 + \mu_{2j}$ und $(1 + \mu_{2i-1})(1 + \mu_{2j})$ ϱ-Bilder von Geradenbündeln sind (ψ ist stetig). Die Kommutativität der oberen Hälfte unseres Diagrammes liefert die Beziehung

$$\Sigma\mu_{2i-1} = \Delta_T^{-1}(\Sigma\mu_i \otimes 1) = AI(\sigma_1 \times 1)$$

und eine entsprechende Gleichung für die andere Summe. Setzen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so gelangen wir zu der Aussage

$$AI\,\psi(\sigma_1 \times \sigma_1) = \psi AI(\sigma_1 \times 1) \cdot \psi AI(1 \times \sigma_1).$$

Die rechte Seite formen wir um, indem wir die Natürlichkeit von ψ verwenden und uns an die Beziehung zwischen "innerem" Produkt und Kreuzprodukt erinnern. Wir erhalten:

$$= AI(\psi(\sigma_1 \times 1) \cdot \psi(1 \times \sigma_1))$$

$$= AI(\psi\, pr_1^*\sigma_1 \cdot \psi\, pr_2^*\sigma_1)$$

$$= AI(\psi\sigma_1 \times \psi\sigma_1).$$

AI ist injektiv. Es folgt die Behauptung.

8.7. Satz: Die multiplikativen Operationen $k \longrightarrow k$ sind genau die ψ^k. Es gilt $\psi^k \circ \psi^t = \psi^{kt} \circ \psi^l$ ist die Identität. ψ^k stimmt mit der ~~ebenso bezeichneten~~ Operation $\psi_{\mathbb{C}}^k$ von Adams überein (vgl. [1]).

Beweis: Den ersten Teil des Satzes haben wir bewiesen. Die Gleichungen $\psi^k \circ \psi^t = \psi^{kt}$ und $\psi^1 = id$ folgen aus 7.5. und 8.5.. Die Übereinstimmung mit den Adamsschen Operationen folgt aus 2.7., wenn man bedenkt, wie die $\psi_{\mathbb{C}}^k$ von Adams auf $k(CP^n)$ wirken.

8.8. Satz: Die multiplikativen Operationen $kSO \longrightarrow kU$ sind genau die Operationen $\psi^k c$ (c: $kSO \longrightarrow kU$ Komplexifizierung).

Der Beweis des Satzes wird in 8.8. bis 8.1o geführt.

Wir verwenden die Operationen r und c aus [1]. Die additiven Operationen $kSO \longrightarrow kU$ sind durch ihren Wert auf dem erzeugenden Element x aus $kSO(B_{T(1)}) = kO(B_{T(1)})$ bestimmt. Es ist $x = r\mu$. [6]) Sei $f: B_{T(1)} \longrightarrow B_{T(1)}$ eine Abbildung mit $f^*(1+\mu) = (1+\mu)^2$. Wir wollen f^*x berechnen:

$$f^*x = f^*r\mu = rf^*\mu = 2r\mu + r\mu^2 .$$

$c: kO(B_{T(1)}) \longrightarrow kU(B_{T(1)})$ ist injektiv. Aus

$$cr\mu^2 = \mu^2 + \left(\frac{1}{1+\mu} - 1\right)^2$$

$$= \frac{\mu^4}{(1+\mu)^2} + 2\frac{\mu^2}{1+\mu}$$

und

$$c(r\mu)^2 = \left(\mu + \frac{1}{1+\mu} - 1\right)^2 = \frac{\mu^4}{(1+\mu)^2}$$

folgt $r\mu^2 = 2x + x^2$, also

$$f^*x = 4x + x^2 .$$

Sei Ψ eine multiplikative Operation und $\Psi x = P(\mu)$. Aus

$$P(2\mu + \mu^2) = P(f^*\mu) = f^*P(\mu) = f^*\Psi x$$

$$= \Psi f^*x = \Psi(4x + x^2) = 4\Psi x + \Psi^2 x$$

$$= 4P(\mu) + P^2(\mu)$$

erhalten wir eine Bedingungsgleichung für $P(\mu)$. Lösungen dieser Gleichung sind

$$P_k = (1+\mu)^k + (1+\mu)^{-k} - 2, \quad k \in Z .$$

Die Lösung P_k gehört zur Operation Ψ^k c. Wir zeigen, dass die Gleichung keine weiteren Lösungen hat.

8.9. Zunächst versuchen wir einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten $P = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \ldots$. ~~Für eine multiplikative Operation ist natürlich $a_0 = 1$.~~

Koeffizientenvergleich zeigt $a_1 = o$, liefert aber für a_2 überhaupt keine Bedingung und führt für $k \geqslant 3$ auf die Gleichung

$4a_k + 2a_1 a_{k-1} + 2a_2 a_{k-2} + \cdots = 2^k a_k +$ Linearkombination in $a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_k$ ist demnach für $k \geqslant 3$ durch die $a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots$ eindeutig bestimmt.

$$(1+\mu)^{\sqrt{r}} + (1+\mu)^{-\sqrt{r}} - 2 = Q_r$$

ist für $r \in Z$ eine Lösung mit rationalen Koeffizienten (formal binomische Entwicklung). Überdies ist $a_2 = r$. Alle Lösungen mit ganz-rationalen Koeffizienten müssen also unter den Q_r vorkommen. In Q_r ist

$$a_n = \binom{\sqrt{r}}{n} + \binom{-\sqrt{r}}{n}.$$

Unser Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können: a_n ist genau dann für alle n eine ganze Zahl, wenn r eine Quadratzahl ist.

8.1o. Sei also $d^2 = c$, c ganz rational und $a_n(c) = \binom{d}{n} + \binom{-d}{n}$ eine ganze Zahl für $n = o, 1, 2, \ldots$ Wir verwenden den folgenden

Hilfssatz: Sei c keine Quadratzahl. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen q, für welche die Kongruenz $x^2 \equiv c \pmod q$ nicht lösbar ist.

Ein Beweis folgt aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz und dem Dirichletschen Primzahlsatz.

Wir nehmen nun an, dass d nicht ganz rational ist. Dann können wir nach dem voranstehenden Hilfssatz eine Primzahl q finden, für die $x^2 \equiv c \pmod q$ unlösbar ist und die kein Teiler von 2c ist.

Im Ring G der ganzen Zahlen des quadratischen Zahlkörpers $Q(d) \neq Q$ ist keine der Zahlen $m+d$ (m ganz rational) durch q teilbar. Aus

$$(a+bd)\,q = m+d \qquad a, b \in Z$$

folgt durch bilden der Norm

$$(a^2 - b^2 c)\,q^2 = m^2 - c,$$

also $m^2 - c \equiv o \pmod q$, was ausgeschlossen war.

q bleibt prim in G (vgl. [17], § 17; Zerlegungsgesetz für quadratische Zahlkörper). Also ist auch

$$C_n = d(d-1)\ldots(d-n+1)$$

prim zu q. Sei

$$C'_n = (-d)(-d-1)\ldots(-d-n+1).$$

Es ist

$$a_n(c) = \frac{1}{n!}\,(C_n + C'_n);$$

und weil $a_n(c)$ eine ganze Zahl ist, müss für $n \geq q$ der Zähler durch q teilbar sein. D.h.

$$C_n \equiv -C'_n \pmod q$$

und ebenso

$$C_{n+1} \equiv -C'_{n+1} \pmod q.$$

Da C_n, C_{n+1} und folglich auch C'_n, C'_{n+1} prim zu q sind, folgt

$$d - n = \frac{C_{n+1}}{C_n} \equiv \frac{C'_{n+1}}{C'_n} = -d - n \pmod q.$$

Also $2d \equiv o \pmod q$. Daraus entnimmt man einen Widerspruch zu $q \nmid 2c$.

Bemerkung: Dieser Beweis (8.1o.) geht auf Cassels zurück. Ich verdanke ihn einer Mitteilung von Schwarzenberger.

9. DER BOTTSCHE ISOMORPHISMUS

9.1. Sei β: $kX \longrightarrow k(S^2 \wedge X^+) = k^{-2}X$ der Bottsche Isomorphismus (X^+ = topologische Summe von X und einem Punkt). Durch die Forderung, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} kX & \longrightarrow & k^{-2}X \\ {\scriptstyle BT}\,\vdots & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ kX & \longrightarrow & k^{-2}X \end{array}$$

möge kommutativ sein, können wir jeder Operation T mit To = o eine Operation BT zuordnen. Berücksichtigen wir nur die Null-Komponente vob BT (vgl. 7.1., 6.7.), so erhalten wir einen stetigen (vgl.2.8.) Homomorphismus

$$B\colon \tilde{k}B_U \longrightarrow \tilde{k}B_U.$$

9.2. Wir betrachten zunächst diese Abbildung B. Die anderen Komponenten von BT bestimmen wir in 6.3.

Satz:
$$B\mu^k = k(\mu^k + \mu^{k-1})$$
$$B\sigma_k = (-1)^{k-1}(\mu^k + \mu^{k-1}) \qquad k \geq 1$$
$$BE^k = (-1)^{k-1}\psi^k$$

Zur Bezeichnung siehe 6.11., 7.5. μ^o hat man wegzulassen, solange man sich nur für die Nullkomponente interessiert. Andernfalls ist $\mu^o = 1$.

Beweis: a) Adams hat in [1], Cor. 5.3. gezeigt, dass $B\psi^k = k\psi^k$ ist. Daraus folgt durch Umrechnen $B\mu^k = k(\mu^k + \mu^{k-1})$. Ein begrifflicher Beweis dieser Gleichung stammt von Adams. Betrachten wir B eingeschränkt auf die additiven Operationen, so erhalten wir eine stetige Abbildung

$B: Z[[\mu]] \longrightarrow Z[[\mu]]$

$(1+\mu)\frac{d}{d\mu}$ ist ebenfalls ein stetiger, additiver Homomorphismus. B und $(1+\mu)\frac{d}{d\mu}$ nehmen auf $(1+\mu)^k = \psi^k$ denselben Wert an, stimmen also überhaupt überein.

b) $B(\sigma_i \sigma_j) = 0$ Es ist nämlich für $x \in \tilde{k}(S^2 \wedge X^+)$ $(\sigma_i \sigma_j)x = (\sigma_i x)(\sigma_j x)$. Anderseits ist in $\tilde{k}$(Einhängung) das Produkt je zweier Elemente Null.

c) Wollen wir die Operation μ^k als Element von $\tilde{k}B_U$ beschreiben, so müssen wir die Potenzsumme $P^k = \Sigma \mu_i^k$ durch die elementarsymmetrischen Funktionen σ_j der μ_i ausdrücken. Es gilt

$$P^k = (-1)^{k-1} k \sigma_k + z,$$

wobei z ganzzahlige Linerkombination von Produkten der σ_j $(j = 1, \ldots, k-1)$ ist (vgl. van der Waerden [24], p. 92, Aufgabe 2). Wenden wir auf die obige Gleichung B an, so werden wir unter Beachtung von a) und b) zur Beziehung

$$B\mu^k = k(\mu^k + \mu^{k-1}) = (-1)^{k-1} k B\sigma_k$$

geführt. Es folgt die Behauptung.

d) Die letzte Gleichung des Satzes berechnet man aus der zweiten und 6.7. (vgl. auch 9.3.).

Bemerkung: Die Formel für $B\sigma_k$ kann man auch erhalten, indem man die Operation P^k in $k(S^2 \times B_{T(1)})$ berechnet unter Verwendung der in 3.11. angegebenen Eigenschaften (Adams).

9.3. BT ist eine additive Operation. Wir haben bisher die 0-Komponente bestimmt. Um die anderen Komponenten

zu erhalten, genügt es nach 7.1. BT auf k(Punkt) zu kennen. Sei P ein Punktraum. Wegen $S^2 \wedge P^+ = S^2$ und $\beta 1 = [\eta] - 1 \in k(S^2)$ (η = Hopf-Bündel) muss man $T([\eta] - 1)$ bestimmen. Wir setzen $BT(1) = q(T) \in kP$. Es ergibt sich $q(E^k) = (-1)^{k-1}$, $k \geq 1$. Aus den letzten Formeln in 6.11. folgt $q(F^k) = 0$ für $k > 1$. Aus $q(\psi^k) = k$ folgt durch Umrechnen $q(\mu^k) = 0$ für $k > 1$ und $q(\mu) = 1$.

9.4. Satz: Jede additive Operation ist Bild bei B.

Beweis: Sei die Operation $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \mu^i$ gegeben. Sei $b_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i a_i$ für $k \geq 1$. Aus der Stetigkeit von B folgt $B(\sum b_k \sigma_k) = \sum a_k \mu^k$.

9.5. Aus 9.2. folgt die Beziehung $B(F^1 + F^2 + \ldots) = 1$.

10. DIE RESTLICHEN OPERATIONEN $k^* \longrightarrow k^*$

Wir beweisen $k^*U = \Lambda[[\beta_1, \beta_2, \ldots]]$. ($\Lambda$ äussere Algebra). $\beta_i \in [U,U] = k^{-1}U$ ist die Einhängung der Operation F^i (vgl. 6.6.).

10.1. Die Operationen $k^0 \longrightarrow k^{-1}$ entsprechen den Elementen von $[Z \times B_U, U]$. $[B_U, U] = k^{-1}B_U = 0$. Also gibt es nur die triviale Operation $k^0 \longrightarrow k^{-1}$.

Um die Operationen $k^{-1} \longrightarrow k^0$ und $k^{-1} \longrightarrow k^{-1}$ bestimmen zu können, müssen wir k^*U berechnen. Zunächst untersuchen wir $k^*U(n)$.

10.2. Sei q ein festes und im Verlauf der Untersuchung noch näher bestimmtes erzeugendes Element von $H^2(CP^\infty;Z)$. Es bestimmt einen Isomorphismus

$$H^*(CP^\infty;Z) \cong Z[q].$$

Wir definieren mit der i-ten Projektion

$$p_i: B_{T(n)} \longrightarrow CP^\infty$$

die Elemente $q_i = p_i^* q$ und legen dadurch einen Isomorphismus $H^*(B_{T(n)};Z) \cong Z[q_1,\dots,q_n]$ fest. Die durch $Bj_n: B_{T(n)} \longrightarrow B_{U(n)}$ induzierte Abbildung

$$Bj_n^*: H^*(B_{U(n)};Z) \longrightarrow H^*(B_{T(n)};Z)$$

ist bekanntlich injektiv. Ferner gilt: Bild Bj_n^* besteht genau aus den in $q_1, \dots, q_n$ symmetrischen Polynomen. Sei $s_i \in H^{2i}(B_{U(n)};Z)$ das Element, dessen Bj_n^*-Bild die i-te elementarsymmetrische Funktion in den $q_1,\dots,q_n$ ist.

10.3. Wir setzen $X = CP^\infty$. Das Bild von μ bei

$$\tilde{k}X \longrightarrow \tilde{k}X^2 \xleftarrow{\cong} \tilde{k}(X^2/X^1) \longrightarrow E_2^{2,-2} = H^2(X;Z)$$

ist ein erzeugendes Element von $H^2(X;Z)$. Wir setzen es gleich q (10.2.). (Man hat einen Isomorphismus $k^{-2}(\text{Punkt}) \cong Z$ auszuzeichnen). Sei

$$\tilde{k}_n Y = \text{Kern}\,(\tilde{k}Y \longrightarrow \tilde{k}Y^{n-1}).$$

Ist die Spektralsequenz für einen Raum Y trivial, so sei w_n der folgende Homomorphismus

$$w_n: \tilde{k}_{2n} \longrightarrow \tilde{k}_{2n}/\tilde{k}_{2n+1} = E_\infty^{2n,-2n} = E_2^{2n,-2n} = H^{2n}(Y;Z).$$

Da die Spektralsequenz multiplikativ ist, gilt für $x \in \tilde{k}_{2n}$, $y \in \tilde{k}_{2m}$ (und folglich $xy \in \tilde{k}_{2n+2m}$)

$$w_{n+m}(xy) = w_n x \smile w_m y.$$

Im Bereich der Räume mit trivialer Spektralfolge sind die w natürlich.

10.4. Lemma: Sei $Y = B_{U(n)}$. Es gilt $w_m \sigma_m = s_m$.

Der Beweis folgt aus der Natürlichkeit der w, wenn man den Zusammenhang zwischen den σ und μ bzw. s und q berücksichtigt.

10.5. $s: \hat{S} \wedge U(n) \xrightarrow{1 \wedge f} \hat{S} \wedge \Omega B_{U(n)} \xrightarrow{g} B_{U(n)}$ sei eine folgendermassen erklärte Abbildung: g entstehe aus der Identität $\Omega B \longrightarrow \Omega B$ durch Transposition, $f: U(n) \longrightarrow \Omega B_{U(n)}$ sei eine kanonische Homotopie-Äquivalenz. s induziert einen Morphismus der Spektralsequenzen. Insbesondere ist

$$\begin{array}{ccc} E_2^{2m,-2m}(B_{U(n)}) & \longrightarrow & E_2^{2m-1,-2m}(U(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2m}(B_{U(n)};Z) & \xrightarrow{s^*} & H^{2m-1}(U(n);Z) \end{array}$$

kommutativ. $H^*(U(n);Z)$ ist isomorph zur äusseren Algebra $\Lambda[b_1,\ldots,b_n]$ über Z, die von Elementen b_i aus $H^{2i-1}(U(n);Z)$ erzeugt wird. Als b_i können die Elemente $s^* s_i$ gewählt werden. Das sind bekannte Sätze; eine Zusammenstellung findet man in [12].

Da $H^*(U(n);Z)$ frei ist, bricht die Spektralsequenz für U(n) zusammen. Es folgt, dass $k^*U(n)$ von den Elementen $\beta_i := s^* \sigma_i$ erzeugt wird. Aus Eigenschaften des Produktes folgt $\beta_i \beta_j = -\beta_j \beta_i$. Da

$H^*(U(n);Z)$ und folglich auch $k^*U(n)$ als abelsche Gruppen den Rang 2^n haben, ist $k^*U(n)$ isomorph zur äusseren Algebra $\Lambda[\beta_1,\dots,\beta_n]$.

10.6. U ist limes-freundlich bzgl. k^*, da $H^*(U;Z)$ torsionsfrei ist. U lässt sich als CW-Komplex mit endlichen Gerüsten auffassen (vgl. [23]). Deshalb ist

$$k^*U = \lim k^*U(n) = \lim_n \Lambda[\beta_1,\dots,\beta_n].$$

Den letzten inversen Limes bezeichnen wir suggestiver mit $\Lambda[[\beta_1,\beta_2,\dots]]$.

Wir wollen die voranstehenden Ergebnisse interpretieren. $s^*\sigma_i = \beta_i$ heisst: Die Operation σ_i (genauer F^i; vgl. 6.11., 6.12.) wirkt auf $\tilde{k}(SX)$ wie β_i auf $k^{-1}X$. Schreiben wir die Potenzsumme $\sum \mu_i^k$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen (vgl. 9.2.), so folgt

$$s^*(\sum \mu_i^k) = (-1)^{k-1}k s^*\sigma_k = (-1)^{k-1}k\beta_k.$$

Daraus entnimmt man, dass die Adams-sche Operation ψ^k auf einer Einhängung $\tilde{k}(SX)$ wie

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} j \binom{k}{j} \sigma_j$$

wirkt. Ist $\tilde{k}(SX)$ torsionsfrei, so folgt daraus durch Induktion nach k die Gleichung

$$\sigma_k x = \Big(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1}\binom{k-1}{j-1}\frac{1}{j}\psi^j\Big)x$$

für $x \in \tilde{k}(SX)$. (Man beachte, dass aus der ersten Formel wegen $j(k,j) = k(k-1,j-1)$ folgt, dass $\psi^k x$ durch k teilbar ist). Produkte der β sind wegen $(\beta_i\beta_j)x = (\beta_i x)(\beta_j x)$ keine additiven Operationen. Produkte der β wirkrn auf einer Einhängung als Nulloperation.

11. DER CHERN - CHARAKTER

Wir beweisen mit der Methode aus 8., dass der Chern-Charakter im wesentlichen die einzige multiplikative Transformation $kU \longrightarrow H^{**}(\ ;Q)$ ist (Q Körper der rationalen Zahlen).

11.1. Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring. Wir suchen die additiven Operationen $kU \longrightarrow H^{2n}(\ ;R)$. Ein Element $A \in [Z \times B_U, K(R,2n)]$ zerfällt in eine Folge A_m: $m \times B_U \longrightarrow K(R,2n)$. Für ein additives A sind die A_m, aufgefasst als Elemente von $[B_U, K(R,2n)]$, gleich. Wir suchen die additiven Elemente $x \in [B_U, K]$ $K := K(R,2n)$. Es ist $H^*(B_T;R) \cong R[z_1, z_2, \ldots]$. Legen wir einen Isomorphismus $H^*(B_{T(1)};R) \cong R[z]$ fest, so sind die z_i durch $p_i^* z = z_i$ gegeben, wobei $p_i: B_T \longrightarrow B_{T(1)}$ die i-te Projektion ist. $(Bj)^*: H^*(B_U;R) \longrightarrow H^*(B_T;R)$ ist injektiv (zur Definition von j siehe 5.6.) Ähnlich wie in 7. gilt der

Satz: x ist genau dann additiv, wenn $(Bj)^* x$ von der Gestalt $r \sum z_i^n$, $r \in R$, ist.

Beweis: Dass die obige Bedingung für die Additivität notwendig ist, entnimmt man aus der Gleichungskette

$$(Bj)^* x = (Bj)^* x \sigma_1 = x(\sum \mu_i) = \sum x\mu_i = \sum p_i^* x \mu$$
$$= \sum p_i(rz^n) = r \sum z_i^n$$

(x fassen wir auch als Operation auf). Dass die Bedingung auch hinreicht, beweist man unter Verwendung des Diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
[K,K] & \xrightarrow{x^*} & [B_U,K] & \xrightarrow{(Bj)^*} & [B_T,K] \\
\downarrow{\scriptstyle b^*} & & \downarrow{\scriptstyle a_U^*} & & \downarrow{\scriptstyle a_T^*} \\
[K\times K,K] & \xrightarrow[(x\times x)^*]{} & [B_U\times B_U,K] & \longrightarrow & [B_T\times B_T,K]
\end{array}$$

(b: $K\times K \longrightarrow K$ H-Verknüpfung in K). Man hat auf die untere Zeile eine Künneth-Formel anzuwenden und wie in 7. a_T^* zu untersuchen.

11.2. Eine additive Operation

$$A:\ k \longrightarrow H^{**}(\ ;R)$$

ist also wiederum durch eine Potenzreihe bestimmt, und zwar durch

$$A(1+\mu) \in H^{**}(B_{T(1)};R) \cong R[[z]].$$

$1+z$ sei dabei die Chern-Klasse des kanonischen Geradenbündels über $B_{T(1)}$. Sei $f: B_{T(1)} \longrightarrow B_{T(1)}$ eine Abbildung mit $f^*(1+\mu) = (1+\mu)^2$. Aus Hirzebruch [18], 4.4.3. folgt dann $f^*z = 2z$. Sei nun A eine multiplikative Operation. Wir setzen $P(z) = A(1+\mu)$ und erhalten

$$\begin{aligned} P^2(z) &= A^2(1+\mu) = A((1+\mu)^2) = A(f^*(1+\mu)) \\ &= f^*A(1+\mu) = f^*P(z) = P(f^*z) \\ &= P(2z). \end{aligned}$$

11.3. Ist R der Körper der rationalen Zahlen Q, so besitzt die Gleichung $P^2(z) = P(2z)$ genau die Lösungen $P(z) = \exp(az)$, $a \in Q$. $P(z) = \exp(z)$ entspricht dem Chern-Charakter. Für ein beliebiges a entspricht $P(z)$ der Zusammensetzung des Chern-Charakters mit der durch $x \longrightarrow a^i x$ $(x \in H^{2i}(\ ;Q))$ gegebenen multiplikativen Transformation $H^{2**}(\ ;Q) \longrightarrow H^{2**}(\ ;Q)$.

12. ALGEBRAISCHE THEORIE DER ADAMS-SCHEN OPERATIONEN IN λ- RINGEN

Die folgenden Überlegungen wurden durch Arbeiten [16] von Grothendieck und [1] von Adams angeregt.

Wir beweisen die Haupteigenschaften der Operationen von Adams für gewisse λ-Ringe. Als Anwendung erhalten wir Aussagen darüber, wie sich die nicht-additiven Operationen in der K-Theorie bei Zusammensetzung verhalten.

12.1. Wir betrachten künftig nur kommutative Ringe mit Einselement. Sei R ein solcher Ring.

Definition: Eine λ-Struktur für R ist eine Familie $(\lambda_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots)$ von Abbildungen

$$\lambda_i : R \longrightarrow R$$

mit den Eigenschaften

$$\text{I} \qquad \lambda_0 x = 1 \qquad\qquad x \in R$$

$$\text{II} \qquad \lambda_1 x = x \qquad\qquad x \in R$$

$$\text{III} \qquad \lambda_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i x)(\lambda_{n-i} y) \qquad x, y \in R.$$

Ein Ring zusammen mit einer λ-Struktur heisst λ-Ring (Grothendieck [16]).

Seien R und S λ-Ringe. Ein Ringhomomorphismus $f: R \longrightarrow S$ heisst λ-Homomorphismus, wenn er mit den λ_i vertauschbar ist. Wegen I erhält f die 1 der Ringe.

Sei für einen Ring R

$$1 + R[[t]]^+$$

die multiplikative Gruppe der formalen Potenzreihen

$$1 + r_1 t + r_2 t^2 + \dots \qquad (r_i \in R).$$

Die Abbildung $r \longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(r) t^i =: \lambda_t(r)$

ist ein Homomorphismus

$$\lambda_t : R \longrightarrow 1 + R[[t]]^+,$$

d.h. es gilt

$$\lambda_t(r+s) = (\lambda_t r)(\lambda_t s).$$

Das folgt aus der Definition einer λ-Struktur.

Indem wir der $1 \in Z$ die Potenzreihe

$$\lambda_t 1 = 1 + t + a_2 t^2 + \dots = P(t) \in 1 + Z[[t]]^+$$

zuordnen, erhalten wir alle λ-Strukturen für Z, falls P(t) alle Potenzreihen der angegebenen Gestalt durchläuft.

12.2. Verabredung: Ausgezeichnet ist die λ-Struktur mit $\lambda_t 1 = 1 + t$ und folglich $\lambda_i(n) = \binom{n}{i} =: (n,i)$. Wir wollen künftig nur noch λ-Ringe mit $\lambda_t 1 = 1 + t$ betrachten.

12.3. Im Polynomring $Z[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sei $\sigma_i = \sigma_i(x)$ das i-te elementarsymmetrische Polynom in den $x_1, \dots, x_n$ ($\sigma_i = 0$ für $i > n$). Die Potenzsumme

$$s_k = \sum_i x_i^k$$

lässt sich eindeutig als ganzzahliges Polynom in den σ_i schreiben:

$$s_k = Q_n^k(\sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

Für $n \geq k$ ist das Polynom unabhängig von n. Wir nennen es dann Q^k.

Definition: Sei R ein λ-Ring. Die Abbildung

$$\psi^k = Q^k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

heisst k-te Adams-sche Operation ($k \geq 1$). Es ist offenbar $\psi^1 = \lambda_1$.

Satz: $\psi^k: R \longrightarrow R$ ist ein Homomorphismus der additiven Struktur von R.

Bemerkung: Dieser Satz ist auch ohne die in 12.2. getroffene einschränkende Verabredung gültig.

Beweis: Wir bezeichnen die k-te elementarsymmetrische Funktion in den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ mit $\sigma_k(x,y)$. Es sei $\sigma_0 = 1$. Dann gilt

$$\sigma_k(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i(x)\ \sigma_{k-i}(y),$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} & Q^k(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_k(x)) + Q^k(\sigma_1(y), \ldots, \sigma_k(y)) \\ &= \sum x_i^k + \sum y_i^k \\ &= Q^k(\sigma_1(x,y), \ldots, \sigma_k(x,y)) \\ &= Q^k(\sigma_1(x)+\sigma_1(y), \ldots, \sum \sigma_i(x)\,\sigma_{k-i}(y)). \end{aligned}$$

Diese Polynomidentität beweist wegen 12.1., Eigenschaft III, die Additivität von ψ^k.

12.4. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ Unbestimmte. Die k-te elementarsymmetrische Funktion in den Produkten $z_{ij} = x_i y_j$ ist symmetrisch und homogen vom Grade k sowohl in den x als auch in den y. Sie lässt sich daher als ganzzahliges Polynom

$$P_k(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_k(x); \sigma_1(y), \ldots, \sigma_k(y))$$

schreiben ($n \geq k$, $m \geq k$).

Definition: Ein λ-Ring R heisse multiplikativ, wenn für alle $x, y \in R$ gilt

$$\lambda_k(xy) = P_k(\lambda_1 x, \ldots, \lambda_k x; \lambda_1 y, \ldots, \lambda_k y).$$

Satz: Z ist ein multiplikativer λ-Ring.

Beweis: Wir gehen aus von der Identität

$$\prod_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} (1 + x_i y_j t) = 1 + P_1 t + P_2 t^2 + \ldots .$$

Setzen wir für alle i, j $x_i = y_j = 1$, so ist der Koeffizient von t^k links (nm,k) und rechts $P_k((n,1),\ldots,(n,k);(m,1),\ldots,(m,k))$; w.z.z.w. (vgl. 12.2.)

12.5. Wir verwenden im folgenden mehrmals eine elementare Überlegung, die wir der Deutlichkeit halber hier ausdrücklich formulieren wollen:

Spaltprinzip: Setzt man in ein Polynom P in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ über einem Ring für x_i die i-te elementarsymmetrische Funktion in neuen Unbestimmten $y_1, \ldots y_n$ ein, so ist durch das resultierende Polynom P eindeutig bestimmt.

Beim Beweis des Satzes in 12.3. haben wir das Spaltprinzip schon verwendet.

12.6. Satz: Sei R ein Ring. In $R' = 1 + R[[t]]^+$ erklären wir eine Verknüpfung $\circ$ durch

$$(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots) \circ (1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots)$$
$$= 1 + P_1(a_1; b_1)t + P_2(a_1, a_2; b_1, b_2)t^2 + \ldots$$

Mit dieser Verknüpfung wird R' zu einem kommutativen Ring mit dem Einselement $1 + t$. [9]

R ist genau dann ein multiplikativer λ-Ring, wenn

$$\lambda_t : R \longrightarrow R^{\mathbb{N}}$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Beweis: Die Behauptung über λ_t folgt aus 12.4. und der ersten Hälfte des Satzes.

Dass $\circ$ eine Ringstruktur induziert, sieht man vermöge einer anderen Beschreibung dieser Verknüpfung ein.

Seien $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ Unbestimmte. Die Untergruppe U von $1 + Z[x_1, \ldots, y_1, \ldots][[t]]^+$, die von den Elementen der Gestalt $(1 + x_i^c t)$, $(1 + y_j^d)$ erzeugt wird (c, d natürliche Zahlen) lässt eine eindeutig bestimmte Erweiterung zu einem Ring zu, dessen Multiplikation $\circ$ die Eigenschaft $(1 + at) \circ (1 + bt) = (1 + abt)$ hat.[10]) Berechnen wir in diesem Ring

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t) \circ \prod_{i=1}^{n} (1 + y_i t),$$

so erhalten wir eine Potenzreihe in t, deren Koeffizienten in den x_i (und y_i) symmetrische Polynome sind. Schreiben wir diese Polynome als Polynom in den $\sigma_j(x)$, $\sigma_j(y)$ und setzen a_j für $\sigma_j(x)$ und b_j für $\sigma_j(y)$, so ist der Koeffizient von t^r gleich $P_r(a_1, \ldots; b_1, \ldots)$ (für $r \leqslant n$). Das Assoziativ- und das Distributivgesetz in $R^{\mathbb{N}}$ folgen jetzt aus den entsprechenden Gesetzen in U (Spaltprinzip).

12.7. Sei $S = Z[x_1, \ldots x_n]$ ein Polynomring über Z. Durch $\lambda_t x_i = 1 + x_i t$ wird ein Ringhomomorphismus λ_t erklärt, der S zu einem multiplikativen λ-Ring macht.

12.8. Satz: Sei R ein multiplikativer λ-Ring. Die Abbildungen ψ^k sind in diesem Falle Ringhomomorphismen.

Beweis: Sei $n \geq k$. Indem λ-Ring $S = \mathbb{Z}[x_1,..,x_n,y_1,..,y_n]$ (vgl. 12.7.) gelten die Beziehungen

$$\lambda_i\, x_j = 0 \qquad \text{für } i > 1,$$
$$\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big) = \sigma_i(x)$$
$$\lambda_i\Big(\sum_{1\leq r,s\leq n} x_r y_s\Big) = \sigma_i(x,y)$$
$$\psi^k\Big(\sum x_j\Big) = \sum \psi^k x_j = \sum x_j^k .$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $Q^k = \sigma_1^k + Q$ ist, wobei in Q jedes Monom einen Faktor σ_i mit $i > 1$ enthält. Es folgt somit für $x = \sum x_i$, $y = \sum y_i$

$$\psi^k x \cdot \psi^k y = \Big(\sum x_i^k\Big)\Big(\sum y_j^k\Big)$$

und $\psi^k(xy) = \sum (x_i y_j)^k$. Daraus entnimmt man mittels $\sigma_i(z) = P_i(\sigma_1(x),\ldots;\sigma_1(y),\ldots)$ (z stehe wie in 12.4. für die Produkte $x_i y_j$). Polynomidentitäten, die die Behauptung für jeden λ-Ring liefern (Spaltprinzip).

12.9. Wir wollen zeigen, wie man den Ring (vgl. 12.6.) $R' = 1 + R[[t]]^+$ zu einem λ-Ring vervollständigen kann.

Sei wieder $S = \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$. S ist ein λ-Ring. $\lambda_t\colon S \to 1 + S[[t]]^+$ ist injektiv. Wir übertragen die λ-Struktur von S auf Bild λ_t. Berechnen wir in $\lambda_t S$

$$\lambda_r \prod (1 + x_i t),$$

so ist der Koeffizient von t^j ein Polynom, symmetrisch

in den x_i und homogen vom Grade jr. Es ist das folgende Polynom: Zunächst bilde man die r-te elementarsymmetrische Funktion σ_r in den x_i und danach die j-te elementarsymmetrische Funktion in den Summanden von σ_r. Als Polynom in den $\sigma_k(x)$ geschrieben nennen wir es

$$L_{jr}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{jr}).$$

L_{jr} ist für $n \geq jr$ unabhängig von n. Nur diese Polynome betrachten wir. (Beachte: I.A. gilt $L_{jr} \neq L_{rj}$).

Wir definieren jetzt die λ-Struktur in R' durch

$$\lambda_r(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots) = 1 + L_{1r}(a_1, a_2, \ldots)t + L_{2r}(a_1, \ldots)t^2 + \ldots$$

Um die Eigenschaft III der λ-Struktur nachzuweisen hat man (die a_i als Unbestimmte aufgefasst) gewisse Polynomidentitäten zu beweisen, die aus der Tatsache folgen, dass $\lambda_t S$ ein λ-Ring ist (Spaltprinzip).

12.1o. Definition: Ein λ-Ring R heisse kompositiv, falls er multiplikativ ist und falls für alle $x \in R$ gilt

$$\lambda_i(\lambda_j x) = L_{ij}(\lambda_1 x, \ldots, \lambda_{ij} x).$$

(Damit sind bei Grothendieck [16] vermutlich "spezielle" λ-Ringe gemeint).

Satz: Z ist ein kompositiver λ-Ring.

$$\lambda_t : R \longrightarrow 1 + R[[t]]^+$$

ist genau dann ein Homomorphismus von λ-Ringen, wenn R kompositiv ist.

Beweis: Die Behauptung über λ_t folgt unmittelbar aus 12.9. und der voranstehenden Definition.

In $1+Z[[t]]^+$ gilt $\lambda_r(1+t)^n = (1+t)^{(n,r)}$.

Daraus folgt $\lambda_r \lambda_t n = \lambda_t \lambda_r n$ (vgl. 12.2.)

12.11. Satz: $S = Z[x_1, \ldots, x_n]$ ist ein kompositiver λ-Ring.

Beweis: Wir haben zu zeigen, dass $\lambda_t : S \longrightarrow 1+S[[t]]^+$ ein Homomorphismus von λ-Ringen ist. Es ist ausreichend, die Beziehung $\lambda_i \lambda_t z = \lambda_t \lambda_i z$ für eine additive Basis von S nachzuweisen. Wir wissen schon, dass λ_t ein Ringhomomorphismus ist. Also folgt für $z = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ $\lambda_t z = 1 + zt$ und daraus

$$\lambda_i \lambda_t z = \begin{cases} 1 & i > 1 \\ 1+zt & i = 1 \\ 1+t & i = 0 \end{cases}$$

Andererseits ist in S

$$\lambda_i z = \begin{cases} 0 & i > 1 \\ z & i = 1 \\ 1 & i = 0 . \end{cases}$$

Es folgt die Behauptung.

12.12. Satz: Sei R ein kompositiver λ-Ring. Dann gilt: 1) $\psi^k : R \longrightarrow R$ ist ein λ-Homomorphismus. 2) $\psi^k \psi^t = \psi^{kt}$

(In der letzten Gleichung links: Komposition von Abbildungen!).

Beweis: In einem kompositiven λ-Ring lässt sich $\lambda_r \psi^k x$ als Polynom $P_r^k(\lambda_1 x, \ldots, \lambda_{rk} x)$ mit einem von x und vom λ-Ring unabhängigen ganzzahligen

Polynom $P_r^k(z_1, \ldots, z_{rk})$ schreiben. Setzt man für z_i die i-te elementarsymmetrische Funktion in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq rk)$ ein, so ist P_r^k eindeutig durch das resultierende Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ bestimmt (Spaltprinzip). Dieses letztere Polynom erhalten wir aber gerade, wenn wir in $S = Z[x_1, \ldots, x_n]$ $\lambda_r \psi^k x$ für $x = x_1 + \ldots + x_n$ berechnen, und es stellt sich als die r-te elementarsymmetrische Funktion in den $x_1^k, \ldots, x_n^k$ heraus. Zum gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir $\psi^k \lambda_r x$ berechnen. Es folgt die erste Behauptung.

Ebenso beweisen wir die zweite Behauptung; denn in S liefern $\psi^k \psi^t x$ und $\psi^{kt} x$ dasselbe Ergebnis, nämlich $\sum_i x_i^{kt}$.

12.13. Beispiel: Mit ähnlichen Methoden wie in [1] beweist man, dass die äusseren Potenzen (vgl. 6.6.) KO(X) und KU(X) für jedes X zu einem kompositiven λ-Ring machen.

12.14. Beispiele für Polynome: (Vgl. 12.4., 12.9.)

$$P_1 = x_1 y_1$$

$$P_2 = x_2 y_1^2 + x_1^2 y_2 - 2x_2 y_2$$

$$P_3 = x_3 y_1^3 + x_1^3 y_3 + 3x_3 y_3 + x_1 x_2 y_1 y_2 - 3x_3 y_1 y_2 - 3x_1 x_2 y_3$$

$$L_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} x_i x_{2n-i} .$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Adams, J.F.: Vector fields on spheres. Ann. of Math. 75 (1962), 603 - 632.

[2] Anderson, D.W.: Berkeley Thesis (1964).

[3] Atiyah, M.F.: Immersions and embeddings of manifolds. Topology 1 (1962), 125 - 132.

[5] Atiyah, M.F.: Characters and cohomology of finite groups. Publ. inst. Hautes Études Sci., No. 9, 23 - 64. Paris (1961).

[4] Atiyah, M.F.: Vector bundels and the Künneth formula. Topology 1 (1962), 245 - 248.

[6] Atiyah, M.F., and Hirzebruch, F.: Vector bundels and homogeneous spaces. Proc. of Symp. in Pure Math. III, 7 - 38. Amer. Math. Soc. (1961).

[7] Atiyah, M.F. und Hirzebruch, F.: Cohomologie-Operationen und charakteristische Klassen. Math. Zeitschr. 77 (1961), 149-187.

[8] Borel, A.: Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compactes. Ann. of Math. 57 (1953), 115 - 207.

[9] Borel, A., and Hirzebruch, F.: Characteristic classes and homogeneous spaces I. Amer. J. Math. 80 (1958), 458 - 538.

[10] Böerner, H.: Darstellungen von Gruppen. Springer-Verlag, Berlin (1955).

[11] Brown, E.H.: Cohomology theories. Ann. of Math. 75 (1962), 467 - 484.

[12] Cartan, H., Séminaire, 12e année 1959/60: Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott. Paris (1961).

[13] Dold, A.: Relations between ordinary and extraordinary homology. Coll. on algebraic topology. Lectures notes. Aarhus Universitet (1962).

[14] Eckmann, B. und Hilton, P.J.: Groupes d'homotopie et dualité I, II, III. Compt. rend. 246 (1958), pp. 2444, 2555, 2993.

[15] Eckmann, B. and Hilton, P.J.: Grouplike structures in general categories I. Math. Annalen 145 (1962), 227 - 255.

[16] Grothendieck, A.: La théorie des classes de Chern. Bull. Soc. math. France 86 (1958), 137 - 154.

[17] Hasse, H.: Vorlesungen über Zahlentheorie. Springer-Verlag, Berlin (1950).

[18] Hirzebruch, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Springer-Verlag, Berlin (1962).

[19] Milnor, J.: On axiomatic homology theory. Pac. J. Math. 12 (1962), 337 - 341.

[20] Milnor, J.: The Representation rings of some classical groups. Notes for mathematics 402, May 1963, Princeton (vervielfältigt).

[21] Netto, E.: Lehrbuch der Combinatorik. 2. Aufl. (1927). Chelsea Publ. Comp., New York.

[22] Puppe, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen.I Math. Zeitschr. Bd. 69, 299 - 344 (1958).

[23] Steenrod, N.E., and Epstein, D.B.A.: Cohomology operations. Ann. of Math. Studies, No. 50. Princeton (1962).

[24] van der Waerden, B.L.: Algebra I, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin (1955).

Ich wurde am 29. 5. 1938 in Sao Paulo, Brasilien, geboren. Meine Eltern sind der Bankkaufmann Hermann tom Dieck und Elga tom Dieck, geb. Klingenberg. Ich besuchte Volks- und Oberschulen in Wernigerode, Oldenburg, Hamburg und Bremen. An der Oberschule am Barkhof in Bremen bestand ich 1957 das Abitur. Ich gehörte dem naturwissenschaftlichen Zuge an. Englisch erste, Latein zweite Fremdsprache, Spanisch freiwillig. Ich studierte Mathematik zunächst sechs Semester an der Universität Göttingen, danach in Saarbrücken. Während des Studiums nahm ich an Seminaren bei den Herren Professoren Dr.W.Maak, Dr.H.Grauert, Dr.W.Klingenberg, Dr.W.Habicht und Dr.D.Puppe teil. Unter der Leitung von Herrn Professor Puppe widmete ich mich besonders dem Studium der Topologie. Ich gehörte der Studienstiftung des deutschen Volkes an. Das Diplomexamen für Mathematik bestand ich im August 1962 in Saarbrücken. Die Diplomarbeit trug den Titel: Die Hopf'sche Invariante. Seit dem 1. September 1963 verwalte ich die Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten. Meine Dissertation "Zur K-Theorie und ihren Kohomologie-Operationen" fertigte ich unter der Leitung von Herrn Professor Puppe an.

Tammo tom Dieck

Druckfehler

S ii	Z.5 v.u.	Hopfalgebren statt Hopfalbegren
Siii	Z. 8 v.u.	... dieses Verfahren noch an zwei Beispielen:...
S 5	Z. 5 v.u.	kanonische statt kanonosche
S 26	Z. 14 v.u.	Homomorphismus statt Homorphismus
S 34	Z. 3 v.u.	... insbesondere Satz VII, 14.1.
S 36	Das z in der Matrix ist zu streichen	
S 38	Z. 6 v.u.	Der letzte Index rechts muss heissen v_j statt v_1 .
S 42	Z. 11 v.u.	... = $[f_o] + n$ statt $f_o + n$
S 43	In der letzten Zeile $h^* \hat{\otimes} h^*$ statt $h^* \otimes h^*$.	
S 45	Z. 10 v.u.	"Sie" ist zu ersetzen durch " Die $(1+\mu)^k$, $k \geqslant o$,"
S 47	Z. 3 v.o.	Geradenbündel
S 54	Z. 9 v.o.	von statt vob
	Z. 13 v.o.	9.3. statt 6.3.
	Z. 17 v.o.	6.6. statt 6.11.
S 56	Z. 6 v.o.	6.6. statt 6.11.
S 59	Z. 12 v.o.	6.6., 6.7. statt 6.11., 6.12.
	Z. 1 v.u.	wirken statt wirkrn
S 60	Z. 4 v.u.	$= \sum p_i^*(rz^n) = \ldots$
S 62	Z. 7 v.o.	Aussagen
Lit.	Z. 9 und 11 v.o.	bundles statt bundels
S 67	Z. 8 v.o.	rechts vom = Zeichen muss stehen: $\sigma_i(z)$, wobei $z_{ij} = x_i y_j$ (Vgl. dazu 12.4.)